

# REZOLVAREA PROBLEMELOR DE LIMITĂ ȘI EXTREM DIN MECANICĂ

**Autori:** Flavius Mihai COLȚAN<sup>1</sup>, Florin-Alexandru PEAGU<sup>2</sup>  
[flavius\\_mihai200214@yahoo.com](mailto:flavius_mihai200214@yahoo.com)

**Coordonatori:** Șef lucr.dr. ing Răzvan Bogdan ITU<sup>3</sup>, Prof.univ.mat.dr. Wilhelm W. KECS<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I

<sup>2</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I

<sup>3</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Departamentul I.M.I.T.

<sup>4</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de Științe, Departamentul

## Rezumat

În lucrare sunt prezentate unele aspecte privind metodele de rezolvare a problemelor de limită și extrem din mecanică.

## Cuvinte cheie

*Mecanică, probleme, limită, extrem.*

### 1. Introducere

Problemele de limită și extrem, din diversitatea problemelor de mecanică, se întâlnesc frecvent. Problemele de limită și extrem formează o categorie aparte în cadrul general al problemelor de mecanică. Prin probleme de limită și extrem înțelegem problemele de determinare a valorilor maxime sau minime ale unei mărimi în conformitate cu anumite condiții inițiale. La rezolvarea acestora intervine în mod expres, pe lângă aplicarea unor metode de calcul, efectuarea unor operații de dificultate sporită, cum ar fi: determinarea valorilor extreme ale unor mărimi, care sunt funcții de o altă mărime mecanică sau geometrică; reprezentarea grafică a unei mărimi ca funcție de altă mărime; generalizarea mai multor rezultate deținute în problemele particulare într-o primă reuniune a acestora într-o problemă generală; discutarea fenomenelor ce au loc într-o problemă după valorile mărimilor care intervin; folosirea în calcule a unor mărimi și operații matematice mai dificile.

Pe parcursul rezolvării problemelor de maxim și minim apar una sau mai multe mărimi ce depind de o altă mărime din aceeași problemă, considerată ca variabilă independentă. Prin enunț se cere să se determine extremele mărimilor funcției. Rezolvarea unor astfel de probleme pot fi înțelese în profunzime dacă se posedă cunoștințe de calcul diferențial, calcul vectorial, inegalități matematice, sau s-ar face analogia cu modele matematice. Există mai multe metode de rezolvare a problemelor de limită și extrem. Pentru rezolvarea unei probleme concrete este necesar de a se alege cea mai rațională metodă.

În continuare se vor enumera și vor fi descrise câteva metode de rezolvare a unor astfel de probleme prin: folosirea noțiunii de derivată a funcției; ecuația parabolei, cu folosirea formulei vârfului parabolei; discriminantul ecuației patratice; utilizarea unor identități și inegalități algebrice remarcabile; folosirea inegalității Cauchy; utilizarea proprietăților funcțiilor trigonometrice; metoda geometrică.

### 2. Metoda de rezolvare prin folosirea noțiunii de derivată a funcției

Posedând cunoștințe de calcul diferențial, rezolvarea problemelor de extrem implică, în general, etapele următoare:

- stabilirea relației dintre mărimea  $y$  al cărei extrem îl căutăm și mărimea  $x$  de care ea depinde,  $y = f(x)$ ;
- calcularea primei derivate a funcției în raport cu  $x$ ,  $y' = f'(x)$ ;
- anularea derivatei și calcularea lui  $x_m$  care asigură extremul  $y_m$ ;
- introducerea valorii  $x_m$  în  $f$  și calcularea extremului  $y_m(x_m)$ ;
- verificarea și interpretarea rezultatului.

Acest algoritm asigură rezolvarea fără dificultăți a problemelor de limită și extrem. Din condițiile problemei este ușor de precizat natura extremului.

Dacă diferențiala schimbă semnul funcției din „+” în „-”, atunci extremul funcției  $y_m(x_m)$  reprezintă un maximum, iar dacă diferențiala schimbă semnul funcției în mod invers, atunci extremul funcției  $y_m(x_m)$  reprezintă un minimum. Când apar dubii, se calculează și derivata a doua. Dacă  $y''(x_m)$  este pozitivă, atunci  $y$  are un minim pentru  $x_m$ , în caz contrar având un maxim. Se vor prezenta două exemple de probleme rezolvate:

a) Două drumuri se-ntretaie în punctul  $O$  sub un unghi drept. În același moment, două automobile pleacă din punctele  $A$  și  $B$  situate pe aceste drumuri, îndreptându-se spre încrucișarea lor. Mișcarea automobilelor fiind uniform accelerată să se determine timpul la care distanța dintre cele două automobile va fi minimă ( $OA = x_0$ ,  $OB = y_0$ ) (fig. 1).

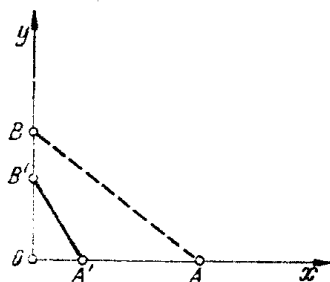


Fig.1.

Rezolvare:

Mișcarea mobilului care pleacă din A are ecuația:

$$x = x_0 - \frac{a_1 t^2}{2}, \quad y = y_0 - \frac{a_2 t^2}{2}, \quad (1)$$

iar cea a mobilului care pleacă din B:

Distanța între punctele A' și B' este:

$$A'B' = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{d^2}, \quad (3)$$

unde:

$$d^2 = x^2 + y^2 = (x_0^2 + y_0^2) - (x_0 a_1 + y_0 a_2) t^2 + \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2) t^4, \quad (4)$$

respectiv:

$$d = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2) - (x_0 a_1 + y_0 a_2) t^2 + \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2) t^4}, \quad (5)$$

Extrema distanței d rezultă din anularea derivatei funcției d în raport cu timpul:

$$\frac{d(d)}{dt} = \frac{-2t(x_0 a_1 + y_0 a_2) + (a_1^2 + a_2^2) t^3}{2\sqrt{(x_0^2 + y_0^2) - (x_0 a_1 + y_0 a_2) t^2 + \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2) t^4}}, \quad (6)$$

Timpul corespunzător distanței A'B' minime este dat de:

$$(a_1^2 + a_2^2) t^2 = 2(x_0 a_1 + y_0 a_2), \quad (7)$$

adică

$$t = \sqrt{\frac{2(x_0 a_1 + y_0 a_2)}{a_1^2 + a_2^2}}, \quad (8)$$

Pentru această valoare a timpului distanța d este:

$$d = \frac{y_0 a_1 - x_0 a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad (9)$$

b) Un punct material greu M se aruncă din O cu viteza inițială  $\vec{v}_0$ , într-o direcție care face cu axa Ox unghiul  $\alpha$ . Un plan P, perpendicular pe planul vertical în care se află traiectoria, face cu orizontala unghiul  $\beta$  (fig. 2). Mișcarea făcându-se în vid, se cer: a) distanța OA la care traiectoria atinge planul P; b) timpul necesar ca să se ajungă din O în A; c) unghiul  $\beta$  fiind dat, să se determine unghiul  $\alpha$ , astfel ca distanța OA să fie maximă.

Rezolvare:

Ecuația de mișcare a punctului este:

$$m\vec{r} = m\vec{g}, \quad (10)$$

respectiv  $\dot{\vec{r}} = \vec{g}t + \vec{C}_1$ ;  $\vec{r} = \frac{\vec{g}t^2}{2} + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$ , unde am notat cu  $\vec{r}$  vectorul de poziție al punctului M.

Condițiile inițiale fiind  $t=0$ ,  $\vec{r}=0$   $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_0$  constantele de integrare sunt  $\vec{C}_1 = 0$ ,  $\vec{C}_2 = \vec{v}_0$  și soluția ecuației are forma:

$$\vec{r} = \frac{\vec{g}t^2}{2} + \vec{v}_0 t = v_0 t \cos \alpha \cdot \vec{i} + \left( v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \right) \vec{j}, \quad (11)$$

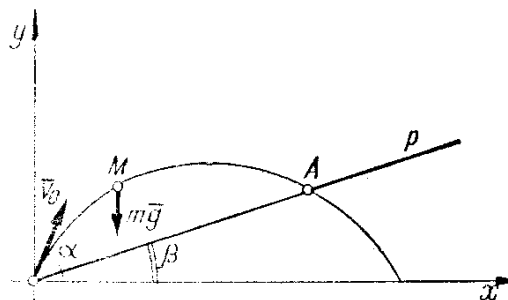


Fig. 2

sau  $x = v_0 t \cos \alpha$ ,  $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$ .  
Ecuatia traiectoriei este parabola

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (12)$$

a) Ecuatia dreptei  $OP$  fiind:

$$y = xtg\beta, \quad (13)$$

Punctul de intersecție al curbei cu dreapta are coordonatele:

$$x_A = \frac{2v_0^2}{g}(tg\alpha - tg\beta)\cos^2 \alpha, \quad y_A = \frac{2v_0^2}{g}(tg\alpha - tg\beta)tg\beta \cos^2 \alpha, \quad (14)$$

Distanța  $OA$  este:

$$OA = \frac{x_A}{\cos \beta} = \frac{2v_0^2}{g \cos \beta} \left( \frac{\sin 2\alpha}{2} - tg\beta \cos^2 \alpha \right), \quad (15)$$

b) Timpul necesar pentru parcurgerea distanței  $OA$  este:

$$t_A = \frac{x_A}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0}{g} (\sin \alpha - tg\beta \cos \alpha) = \frac{2v_0}{g} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}, \quad (16)$$

c)  $OA$  este maxim când  $\frac{dOA}{d\alpha} = 0$ , adică:

$$\cos 2\alpha - tg\beta \cdot 2 \cos \alpha (-\sin \alpha) = 0, \quad (17)$$

respectiv

$$\cot g 2\alpha = -tg\beta, \quad (18)$$

### 3. Metoda de rezolvare prin ecuația parabolei, cu folosirea formulei vârfului parabolei

O altă metodă de rezolvare a unor probleme de limită și extrem se reduce la alcătuirea unei ecuații de tipul  $y = f(x)$ , ce exprimă dependența a două mărimi variabile din problemă și cercetarea ulterioară a funcției obținute la maxim și minim. Vom începe prin determinarea extremelor funcției polinomiale de gradul II de forma

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \quad (19)$$

unde  $a \neq 0$  și  $a, b, c \in R$  (mulțimea numerelor reale). Graficul acestei funcții este o parabolă. Ne punem problema de a determina coordonatele vârfului parabolei. Se face următoarea transformare:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[ \left( x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}, \quad (20)$$

Al doilea termen al relației (20) nu conține  $x$ , de aceea pentru  $x + \frac{b}{2a}$ , adică pentru  $x = -\frac{b}{2a}$ , obținem extremul funcției:

$$y_{\max}(y_{\min}) = \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad (21)$$

Maximul funcției  $y(x)$  are loc pentru  $a < 0$ , iar minimul pentru  $a > 0$ . Dacă  $a < 0$  ramurile parabolei sunt îndreptate în jos, iar dacă  $a > 0$  ramurile parabolei sunt îndreptate în sus. Vom analiza următorul exemplu:

c) Vom calcula înălțimea maximă la care ajunge punctul  $M$  de la problema precedentă, pe traiectoria pe care o descrie, prin metoda de rezolvare prin ecuația parabolei, cu folosirea formulei vârfului parabolei.

Rezolvare:

Conform relației (12) traiectoria este parabola:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + xtg\alpha, \quad (22)$$

Vom determina coeficienții funcției polinomiale de gradul II ( $a, b, c$ ) dată de relația (19), prin identificare cu expresia parabolei dată de relația (22):

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + xtg\alpha \equiv ax^2 + bx + c, \quad (23)$$

de unde rezultă:  $a = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$ ;  $b = tg\alpha$ ;  $c = 0$ .

Funcției  $y(x)$  are un maxim deoarece  $a < 0$  și ramurile parabolei sunt îndreptate în jos. Deci maximul funcției  $y(x)$ , adică înălțimea maximă la care ajunge punctul  $M$ , dată de relația (21), va fi:

$$y_{max} = h_{max} = \frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{4 \cdot \left( -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \cdot 0 - tg^2 \alpha}{4 \cdot \left( -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right)} = \frac{-\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{-4 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{v_0^2}{2g \sin^2 \alpha} \quad (24)$$

#### 4. Metoda de rezolvare prin discriminantul ecuației pătratice

Pentru determinarea extremelor funcțiilor de gradul II, de forma:

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \quad (25)$$

egalăm această funcție cu zero și găsim discriminantul

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0, \quad (26)$$

de unde găsim valoarea maximă sau minimă a uneia din variabile. Dacă, de exemplu, vrem să găsim variabila  $a_{max}$ , din

relația (26) rezultă  $a \leq \frac{b^2}{4c}$ , de unde rezultă că  $a_{max} = \frac{b^2}{4c}$ .

Dacă vrem să găsim  $b_{min}$ , din (26), obținem  $b^2 \geq 4ac \Rightarrow b \geq \sqrt{4ac} \Rightarrow b_{min} = \sqrt{4ac}$ . În continuare vom da un exemplu de problemă:

d) Din același punct și în același sens, pe o traiectorie rectilinie, pleacă două mobile. Primul mobil se deplasează cu viteză constantă  $v_1 = 2m/s$ , iar cel de-al doilea pleacă cu viteza inițială  $v_{02} = 6m/s$  și cu o anumită întârziere față de primul mobil, deplasându-se uniform încetinit cu accelerația  $a = 0,5m/s^2$ . Să se determine valoarea maximă a timpului de întârziere la plecarea celui de-al doilea mobil față de primul, pentru care mai este posibilă întâlnirea.

Rezolvare:

Notăm cu  $t$  timpul măsurat din momentul plecării celui de-al doilea mobil până la întâlnirea cu primul, iar cu  $t_1$  timpul de întârziere a celui de-al doilea mobil față de primul. Deplasările celor două mobile sunt:

$$s_1 = v_1(t_1 + t), \quad (27)$$

$$s_2 = v_{02}t - \frac{at^2}{2}, \quad (28)$$

Din egalitatea drumurilor  $s_1 = s_2$  rezultă:

$$v_1(t_1 + t) = v_{02}t - \frac{at^2}{2} \Rightarrow at^2 - 2(v_{02} - v_1)t + 2v_1t_1 = 0, \quad (29)$$

Rezultă că întâlnirea celor două mobile este posibilă, dacă discriminantul ecuației pătratice (29) cu variabila  $t$  îndeplinește condiția:

$$\Delta = 4(v_{02} - v_1)^2 - 8a_1v_1 \geq 0, \quad (30)$$

de unde rezultă expresia timpului de întârziere:

$$t_1 \leq \frac{(v_{02} - v_1)^2}{2v_1}, \quad (31)$$

Din relația (31) rezultă că:

$$t_{1max} = \frac{(v_{02} - v_1)^2}{2v_1}, \quad (32)$$

Observații:

1. Dacă  $t_1 < t_{1max}$  mobilele se vor întâlni de două ori, ecuația (31) având două soluții distincte și pozitive. Acest lucru este într-adevăr realizabil. Prima din cele două întâlniri va avea loc prin ajungerea și depășirea primului automobil de către cel de al doilea, iar a doua, prin ajungerea și depășirea celui de al doilea mobil de către primul.

2. În cazul în care  $t_1 \geq t_{1max}$  întâlnirea nu este posibilă, deoarece cel de-al doilea mobil nu mai poate ajunge din urmă primul mobil.

#### 5. Metoda de rezolvare prin utilizarea unor identități și inegalități algebrice remarcabile

În multe tipuri de probleme de extrem pot fi folosite identități și inegalități algebrice și aritmetice remarcabile, substituind cu succes calculul diferențial complicat. În cele ce urmează ne vom referi la câteva inegalități și identități cu utilizare mai frecventă în soluționarea problemelor de extrem și vom aminti pe cele mai puțin frecvente, dar folositoare în anumite cazuri.

Inegalitățile mediilor,  $m_{ar} < m_g < m_a$ , în care  $m_{ar}$  este media armonică a numerelor reale strict pozitive  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $m_g$  - media geometrică a aceluiași numere, iar  $m_a$  - media aritmetică a acestora:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \left( \prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (33)$$

Inegalitățile devin egalități dacă și numai dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz are forma:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \quad (34)$$

unde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ .

Inegalitatea devine egalitate pentru  $a_i = k b_i$ , unde  $k \in \mathbb{R}$ . Dacă în loc de  $a_i$  și  $b_i$  din relația (34) folosim numerele pozitive  $\sqrt{a_i}$  și  $\frac{1}{\sqrt{a_i}}$ , rezultă un caz particular al inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwartz cu o arie largă de utilizare în problemele de extrem:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2 \quad (35)$$

Inegalitatea (35) devine egalitate numai dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Inegalitatea lui Lagrange are forma:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad (36)$$

unde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ .

Atât inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz, cât și inegalitatea lui Lagrange pot fi folosite cu succes în problemele de extrem din fizică (și nu numai) în locul metodei cunoscute sub denumirea de multiplicatorii lui Lagrange, care face apel la cunoașterea derivatelor parțiale a unei funcții reale de  $n$  variabile reale.

În aceeași categorie a inegalităților remarcabile sunt de amintit inegalitățile lui Minkovski, inegalitatea lui Holder, inegalitățile lui Bernoulli, inegalitatea lui Cebîșev, inegalitatea lui Jensen, precum și alte inegalități ce se pot găsi în unele manuale și tratate de matematică elementară. Vom da un exemplu de problemă rezolvată:

e) Se dau  $n$  resorturi mecanice care se montează o dată în serie, și altă dată în paralel. Cunoșcând că într-un caz și în celălalt corpul care se atașează sistemelor oscilante formate este același, să se determine relația dintre constantele elastice ale resorturilor respective, astfel încât raportul dintre perioada de oscilație a sistemului serie și perioada de oscilație a sistemului paralel de resorturi să fie minim. Care este valoarea acestui raport minim?

Rezolvare:

Notăm cu  $m$  masa corpului ce se atașează celor două sisteme oscilante și cu  $k_i$ , unde  $i \in [1, n]$ , constantele elastice diferite ale resorturilor montate în serie și, respectiv, în paralel. În cazul sistemului oscilant serie (fig. 3, a), perioada de oscilație:

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_s}} = 2\pi \sqrt{m \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}} \quad (37)$$

iar în cazul sistemului oscilant paralel, perioada de oscilație este:

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_p}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\sum_{i=1}^n k_i}} \quad (38)$$

Facem raportul perioadelor și obținem:

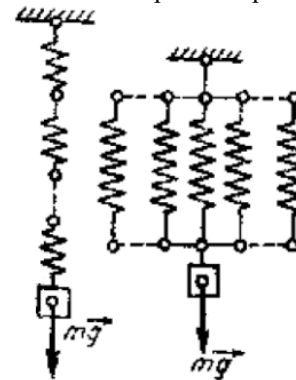


Fig. 3

$$\frac{T_s}{T_p} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n k_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}\right)}, \quad (39)$$

Vom folosi cazul particular al inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwartz, sub forma relației (35):

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2, \quad \text{inegalitate care devine egalitate numai dacă } a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Vom aplica această inegalitate pentru cazul nostru și obținem:

$$\frac{T_s}{T_p} \geq n, \quad (40)$$

Raportul dintre perioada de oscilație a sistemului serie și perioada de oscilație a sistemului paralel de resorturi este minim:

$$\left(\frac{T_s}{T_p}\right)_{\min} = n, \quad (41)$$

dacă resorturile au aceeași constantă elastică  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ , adică resorturile sunt identice.

### 6. Metoda de rezolvare prin folosirea inegalității Cauchy

Este cunoscută regula matematică: *valoarea medie aritmetică a două numere pozitive a și b nu este mai mică decât valoarea medie geometrică ale acestora*, adică:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad (42)$$

În afară de aceasta, este cunoscut că egalitatea  $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$  se respectă numai pentru  $a = b$ , iar inegalitatea  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  se respectă pentru  $a \neq b$ .

De aici rezultă teorema despre *produsul constant*: *suma a două numere pozitive variabile, al căror produs este constant, are valoare minimă atunci când cele două numere sunt egale*.

Din relația (42) rezultă că:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad (43)$$

Semnul „=” se respectă pentru  $a = b$ , iar semnul „<” pentru  $a \neq b$ . Rezultă teorema despre *suma constantă*: *produsul a două numere pozitive variabile, a căror sumă este constantă, are valoare maximă atunci când cele două numere sunt egale*.

Din teorema despre produsul constant rezultă că *suma a două numere reciproc inverse a și 1/a nu este mai mică decât doi*:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad (44)$$

Într-adevăr, produsul  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$  este constant. Însă dacă  $a = \frac{1}{a}$ , atunci  $a = 1$ , iar suma  $a + \frac{1}{a} = 2$ . Pentru  $a \neq \frac{1}{a}$ ,

în baza teoremei despre produsul constant, rezultă  $a + \frac{1}{a} > 2$ . De aceea, dacă avem funcția  $y = \frac{1}{x}$ , atunci  $(y+x)_{\min} = 2$ . Vom da un exemplu de problemă rezolvată:

f) Două autovehicule  $A_1$  și  $A_2$  pornesc simultan din același punct  $M$  și se deplasează în aceeași direcție și în același sens cu vitezele  $v_1$  și  $v_2$  ( $v_1 < v_2$ ), descriind un drum rectiliniu. După cât timp de la pornire, unghiul  $\alpha$  sub care se văd autovehiculele dintr-un punct  $P$ , situat la distanța  $PM = d$ , este maxim? (fig. 4).

Rezolvare:

Notăm  $MO = d_1$  depărtarea punctului  $M$  față de piciorul perpendicularei duse din  $P$  în  $O$  și cu  $PO = h$  lungimea acestei perpendiculare.

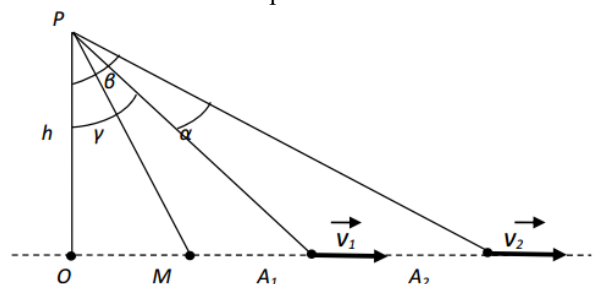


Fig. 4

După timpul  $t$  de la pornire, distanțele parcurse de cele două autovehicule în mișcarea uniformă și rectilinie vor fi:

$$MA_1 = v_1 t < MA_2 = v_2 t ; \quad v_1 < v_2 ,$$

Din fig. 1 rezultă că  $\alpha = \beta - \gamma$ , astfel că:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma} , \quad (45)$$

Din  $\Delta POA_2$ , avem:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{OA_2}{PO} = \frac{OM + MA_2}{PO} = \frac{d_1 + v_2 t}{h} , \quad (46)$$

iar din  $\Delta POA_1$ , avem

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{OA_1}{PO} = \frac{OM + MA_1}{PO} = \frac{d_1 + v_1 t}{h} , \quad (47)$$

Substituind relațiile (46) și (47) în (45), obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h(v_2 - v_1)}{\frac{h^2 + d_1^2}{t} + v_1 v_2 t + d_1(v_1 + v_2)} , \quad (48)$$

Dar, cum se vede din fig. 4:

$$h^2 + d_1^2 = PM^2 = d^2 , \quad (49)$$

și deci

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h(v_2 - v_1)}{\frac{d^2}{t} + v_1 v_2 t + d_1(v_1 + v_2)} , \quad (50)$$

Unghiul  $\alpha \rightarrow \max$  dacă  $\frac{d^2}{t} + v_1 v_2 t \rightarrow \min$ .

Conform teoremei despre produsul constant, suma a două numere pozitive variabile, al căror produs este constant, are valoare minimă, atunci când cele două numere sunt egale.

Rezultă că:

$$\frac{d^2}{t} = v_1 v_2 t ; \Rightarrow t = \frac{d}{\sqrt{v_1 v_2}} , \quad (51)$$

g) Două forțe concurente  $F_1$  și  $F_2$ , ale căror direcții fac un unghi  $\alpha$ , au mărimi variabile, însă suma acestor mărimi este constantă și este egală cu  $F$ . Să se determine mărimea fiecăruia din cele două forțe, astfel încât mărimea rezultantei lor  $R$  să fie minimă, precum și această valoare minimă. Să se analizeze rezultatul obținut în funcție de unghiul  $\alpha \in [0, \pi]$  considerând trei cazuri:

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  și  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Aplicație numerică:  $\alpha = 60^\circ$  și  $F = 4N$ .

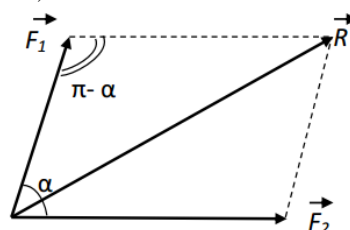


Fig. 5

Rezolvare:

Rezultanta  $R$  a celor două forțe se determină prin aplicarea teoremei cosinusului în triunghiul forțelor (fig. 5):

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha) , \quad (52)$$

de unde, obținem:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 \pm 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha)} , \quad (53)$$

Semnul “+” în relația (53) se pune dacă  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , iar semnul “-” se pune dacă  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ . Dacă  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  este evident

că produsul  $2F_1F_2 \cos \frac{\pi}{2}$  este nul.

Luând în considerare enunțul problemei, avem:

$$F_1 + F_2 = F \Rightarrow F_1^2 + F_2^2 = F^2 - 2F_1F_2 , \quad (54)$$

Substituind relația (54) în (53), obținem:

$$R = \sqrt{F^2 - 2F_1F_2(1 \pm \cos \alpha)} , \quad (56)$$

Conform teoremei despre suma constantă: produsul a două numere pozitive variabile, al căror sumă este constantă, are valoare maximă atunci când cele două numere sunt egale.

Rezultă că  $R \rightarrow \max$ , atunci când  $2F_1F_2 \rightarrow \max$ , iar aceasta se îndeplinește dacă:

$$F_1 = F_2 = \frac{F}{2}, \quad (57)$$

În acest caz:

$$R = F \sqrt{\frac{1 \pm \cos \alpha}{2}}, \quad (58)$$

Consecințe:

$$\begin{aligned} \text{- dacă } \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad R_{\min} &= F \cos \frac{\alpha}{2} = 4N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}N; & \text{- dacă } \alpha > \frac{\pi}{2}, \quad R_{\min} &= F \sin \frac{\alpha}{2} = 4N \cdot \frac{1}{2} = 2N; \\ \text{- dacă } \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad R_{\min} &= F \frac{\sqrt{2}}{2} = 4N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}N. \end{aligned}$$

### 7. Metoda de rezolvare prin utilizarea proprietăților funcțiilor trigonometrice

În acest caz se utilizează formulele de reducere a unor funcții trigonometrice mai complicate la o formă mai simplă.

h) Un corp de masă  $m$  este deplasat uniform pe un plan orizontal cu ajutorul unei forțe  $F$ , ce formează cu orizontală un unghi  $\alpha$ . Coeficientul de frecare dintre corp și planul orizontal este  $\mu$ . Să se determine valoarea unghiului  $\alpha$  pentru care valoarea forței  $F$  este minimă, precum și valoarea acestei forțe.

Rezolvare:

Construim diagrama schematică a tuturor forțelor care acționează asupra corpului (Fig. 6) și scriem legea a II-a a lui Newton în formă vectorială:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0, \quad (59)$$

$$OX : F \cos \alpha - F_f = 0 \Rightarrow F \cos \alpha = F_f = \mu N, \quad (60)$$

$$OY : N + F \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F \sin \alpha, \quad (61)$$

Substituim relația (60) în (61) și obținem:

$$F \cos \alpha = \mu(mg - F \sin \alpha) \Rightarrow F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = \mu mg \Rightarrow F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}, \quad (62)$$

Forța  $F$  este minimă dacă numitorul  $\cos \alpha + \mu \sin \alpha$  are valoare maximă. Vom introduce un oarecare unghi  $\beta$ , (unghi de frecare) pentru care  $\mu = \tan \beta$  și facem următoarea transformare trigonometrică:

$$\cos \alpha + \mu \sin \alpha = \cos \alpha + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin \alpha = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta}, \quad (63)$$

Rezultă că valoarea maximă a numitorului  $\cos \alpha + \mu \sin \alpha$  se obține pentru:

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \mu = \tan \alpha, \quad (64)$$

Substituim relația (64) în (62) și obținem:

$$F_{\min} = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \frac{mgtg\alpha}{\cos \alpha + tg\alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{mg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha} = \frac{mg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}} = mg \sin \alpha, \quad (65)$$

### 8. Metoda de rezolvare prin metoda geometrică

Rezolvarea problemelor de extrem prin această metodă implică construirea unei diagrame schematice, trasarea tuturor forțelor care acționează asupra unui punct material sau asupra unui sistem de puncte materiale, compunerea forțelor sau reducerea sistemului de forțe la o forță rezultantă etc.

i) Vom face rezolvarea problemei precedente prin metoda geometrică:

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0 \Leftrightarrow \vec{F} + \vec{G} + \vec{Q} = 0; (\vec{N} + \vec{F}_f = \vec{Q}), \quad (66)$$

Construim diagrama schematică a tuturor forțelor care acționează asupra corpului (fig. 7, a) și compunem  $\vec{F}_f$  și  $\vec{N}$ , obținând forța de reacțiune  $\vec{Q}$ , cu care suprafața acționează asupra corpului. Scriem legea a II-a a lui Newton în formă vectorială:

Proiectăm legea a II-a a lui Newton pe axe:

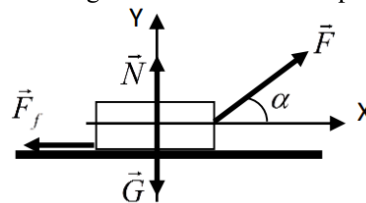
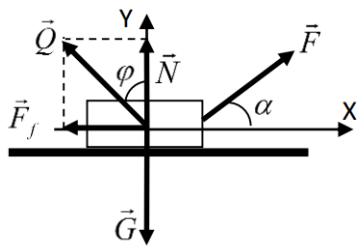


Fig. 6

Din figura 7, rezultă:

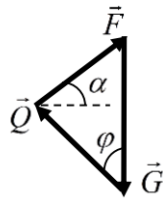




a)

Fig. 7

b)



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_f}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu, \quad (67)$$

Egalitatea vectorială (59) formează un triunghi (fig. 7, b). Forța  $\rightarrow F$   $\rho$  min dacă  $\vec{F} \rightarrow \min$  dacă  $\vec{F} \perp \vec{Q} \Rightarrow \alpha = \varphi$  (ca unghiuri dintre laturile reciproc perpendiculare)  $\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \mu$ . Rezultă că:

$$F_{\min} = mg \sin \alpha, \quad (68)$$

### 9. Concluzii

În lucrare au fost prezentate importante metode de matematică superioară și matematică elementară de rezolvare a problemelor de limită și extrem. Subiectul însă nu este epuizat nici pe departe. Există încă multe alte metode particulare, prin care matematica poate aduce notabile servicii privind rezolvarea problemelor de extrem.

Celor interesați care doresc să-și aprofundeze cunoștințele din domeniu le-ar fi utile următoarele sfaturi:

1. După obținerea modelului matematic al funcției, ce descrie un fenomen sau proces fizic, se încearcă aplicarea uneia dintre metodele elementare de determinare a extremelor funcției și numai în cazul în care aceste metode nu pot ajuta la rezolvarea problemei se apelează la calculul diferențial.

2. Aplicarea uneia sau alteia dintre metodele elementare prezentate, pentru rezolvarea acestui gen de probleme, trebuie să se facă pe criteriul simplificării metodei.

### Bibliografie:

1. Popa M., *Formarea și dezvoltarea competențelor elevilor prin rezolvarea problemelor de limită și extrem la fizică*.
2. Sfichi, R., *Probleme de limită și extrem în fizică*, București, Editura did. și pedagogică, 1979.
3. Hristev, A., *Olimpiadele Internaționale*, cap. Fizica, București, Editura Scorpion, 1995.
4. Sfichi, R., Rusu, C., *Cu privire la unele metode elementare de rezolvare a problemelor de extrem la fizică*, Revista de fizică EVRICA, 2002, Nr. 1 (137), p. 19-22.
5. Anton, F., *Metodica rezolvării problemelor de fizică*, Revista de fizică EVRICA, 2008, Nr. 4(167), p. 4-9.

# ASPECTE PRIVIND APLICAREA METODEI GRAFICE LA REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE MECANICĂ

**Autori:** Daniel MÂNDRUȚ<sup>1</sup>, Andreea-Alina CIOBANAȘU<sup>2</sup>  
[danielmandrut01@gmail.com](mailto:danielmandrut01@gmail.com)

**Coordonatori:** Șef lucr.dr. ing Răzvan Bogdan ITU<sup>3</sup>, Lector univ.dr. Mihaela TOMESCU<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I

<sup>2</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Tehnologia construcțiilor de mașini, anul I

<sup>3</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Departamentul I.M.I.T.

<sup>4</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de Științe, Departamentul Matematică-Informatică

## Rezumat

Analiza amănunțită a rezultatelor obținute din rezolvarea unor probleme de mecanică se poate face prin interpretarea grafică a procesului în care este implicat sistemul mecanic. La rezolvarea problemelor se obțin rezultate care au sau nu sens fizic, sau sensul lor este foarte greu de interpretat. Reprezentarea grafică permite să se explice mai clar rezultatele obținute, fenomenele care au loc iar, în unele cazuri, chiar să se evite unele greșeli de rezolvare. În lucrare se examinează exemple de probleme prin aplicarea metodei grafice.

## Cuvinte cheie

Mecanică, probleme, grafică.

## 1. Introducere

Reprezentarea grafică își propune să prezinte relațiile dintre idei, date, informații și concepte folosind o hartă vizuală sau o diagramă. Reprezentarea grafică este ușor de înțeles și disponibilă și poate fi editată și partajată. Reprezentările grafice depind de tipul de cunoștințe de reprezentat și de domeniul de învățare și sunt una dintre cele mai eficiente strategii de învățare.

Avantajele reprezentărilor grafice: facilitează și îmbunătățesc învățarea; ajută la înțelegerea conținutului; pot fi folosite într-o varietate de subiecte; crește gândirea structurată; ajută la crearea de prezentări sugestive; îmbunătățește comunicarea; utile pentru auto-evaluare și evaluarea informațiilor; crește creativitatea și contribuie la brainstorming.

## 2. Aplicarea metodei grafice la analiza rezultatelor problemelor

Pentru a face o analiză mai profundă a rezultatelor obținute în urma rezolvării problemelor de mecanică și pentru înțelegerea fenomenelor care au loc, deseori este necesară o reprezentare grafică a rezultatelor obținute. În același timp, o mulțime de probleme se reduc la rezolvarea unor ecuații de gradul doi sau trei, care au, corespunzător, două sau trei rădăcini.

Rezolvarea grafică a acestor ecuații ne permite să determinăm câte soluții poate avea problema, care din ele au sens și care nu. Unele probleme, care se reduc la rezolvarea ecuațiilor de gradul trei, în genere, nu pot fi rezolvate analitic, ci numai grafic.

În cele ce urmează vom da câteva exemple de rezolvare a problemelor și de analiză a rezultatelor obținute, utilizând metoda grafică.

a) Un corp alunecă pe un plan înclinat sub un unghi  $\alpha$  față de orizont. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este  $\mu$ . Pentru ce valoare a unghiului a accelerația corpului este  $a$ ?

Rezolvare:

Proiecțiile forțelor de greutate  $\vec{G}$  și de frecare  $\vec{F}_f$  pe axa  $x$  (axa mișcării) (fig.1), sunt

$$G = mg \sin \alpha, \text{ și } F_f = -\mu N = -\mu mg \cos \alpha = -\mu mg \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Accelerația corpului este:

$$a = g \sin \alpha - \mu g \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = g \left( \sin \alpha - \mu \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \right) \quad (1)$$

Din ultima expresie rezultă ecuația pătrată:

$$\begin{aligned} a = g \sin \alpha - \mu g \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} &\Rightarrow \mu g \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = g \sin \alpha - a; \left( \quad \right)^2 \\ &\Rightarrow \mu^2 g^2 (1 - \sin^2 \alpha) = g^2 \sin^2 \alpha - 2ag \sin \alpha + a^2; \Rightarrow \end{aligned}$$

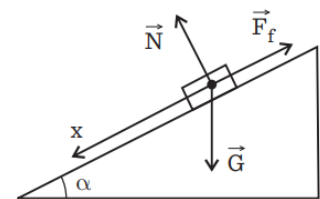


Fig. 1

$$\Rightarrow (1 + \mu^2) \sin^2 \alpha - 2 \frac{a}{g} \sin \alpha + \frac{a^2}{g^2} - \mu^2 = 0$$

Soluțiile acesteia sunt:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{a}{g} \pm \mu \sqrt{\mu^2 - \left(\frac{a}{g}\right)^2 + 1}}{1 + \mu^2}, \quad (2)$$

Din expresia obținută vedem că una și aceeași valoare a accelerației matematic poate fi obținută pentru două valori diferite ale unghiului  $\alpha$ . Din ce cauză obținem acest rezultat și pot avea oare sens fizic ambele rădăcini ale expresiei (2)? Pentru a răspunde la această întrebare vom construi graficul dependenței  $a = f(\sin \alpha)$ .

Deoarece  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , expresia (1) poate fi scrisă și sub forma:

$$a = g \sin \alpha + \mu g \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad (3)$$

Expresia (3) nu are sens fizic, deoarece această expresie ar corespunde unei forțe de frecare orientate în direcția mișcării corpului.

În fig. 2 sunt reprezentate grafic dependențele  $a = f(\sin \alpha)$  obținute din expresia (1) (linie neîntreruptă) și din expresia (3) (linie întreruptă).

Din figură vedem că două valori pozitive ale aceleiași accelerații pentru diferite unghiuri de înclinație a planului  $\alpha_1$  și  $\alpha_2$  le putem obține numai în cazul expresiei (3),

care nu are sens fizic, iar din expresia (2) sens fizic are doar valoarea pozitivă. Deci, una și aceeași valoare a accelerației poate fi obținută doar pentru o singură valoare a unghiului  $\alpha$ .

b) Pe un disc este fixat un resort de un capăt al cărui este prins un corp mic de masă  $m$ . Resortul are lungimea  $l_0$ , iar corpul se află la distanța  $x_0$  de la axa de simetrie a discului (fig. 3). Resortul se extinde și corpul se fixează la distanța  $r_1$  de la axa discului, astfel încât mișcarea lui se limitează de limitatoarele 1 și 2 în intervalul  $r_1 \leq r \leq r_2$  unde  $r$  este distanța de la corp până la axa discului. Coeficientul de elasticitate a resortului este  $k$ . Întreg sistemul se rotește cu viteza unghiulară  $\omega$ . Pentru ce valoare a vitezei unghiulare corpul se va afla la distanța  $r_1 < r < r_2$ ? Masa resortului se neglijează.

Rezolvare:

Asupra corpului acționează forțele:

$$F_1 = k(r + x_0), \quad (4) \quad F_2 = m\omega^2 r, \quad (5)$$

Egalând aceste două forțe, obținem relația dintre viteza de rotație a discului  $\omega$  și distanța  $r$  până la poziția de echilibru a corpului:

$$k(r + x_0) = m\omega^2 r, \quad (6)$$

S-ar părea că, exprimând  $\omega$  din (6), putem determina viteza unghiulară pentru care corpul se va afla la orice distanță  $r$  de la axa de rotație. Însă, în realitate problema este mai complicată.

Îl vom exprima pe  $r$  din (6):

$$r = \frac{kx_0}{m\omega^2 - k}, \quad (7)$$

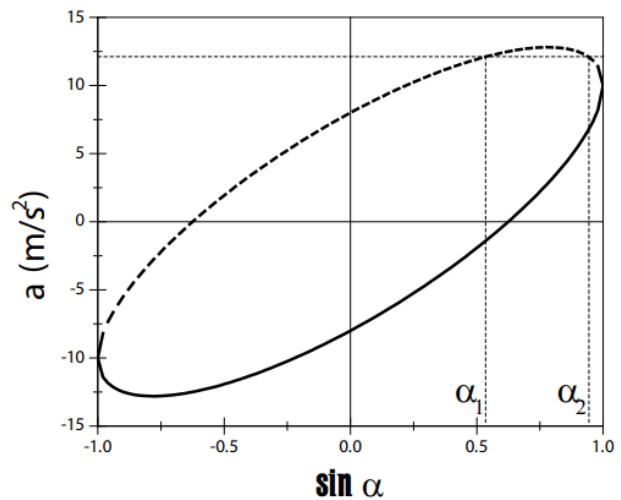


Fig. 2

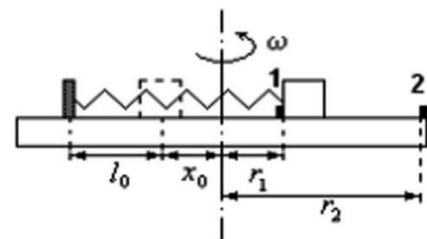


Fig. 3

Din (7) vedem că rezultatul obținut este valabil doar pentru  $\omega \geq \omega_0$ . Pentru  $\omega < \omega_0$ , obținem  $r < 0$

$$\omega \geq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

și expresia (4) în acest caz nu este valabilă. Pentru  $\omega = \omega_0$  poziția de echilibru a corpului se va afla la o distanță infinit de mare de la axa discului.

Pentru a explica fenomenele care au loc, reprezentăm grafic funcțiile  $F_1(r)$  și  $F_2(r)$  din expresiile (4) și (5) (fig. 4).

Din fig. 4 se observă că pentru orice viteză unghiulară mai mică decât  $\omega_1$ , la distanța  $r = r_1$ ,  $F_1 > F_2$  și forța de reacțiune a limitatorului menține corpul în stare de repaus. La  $\omega = \omega_1$  sistemul trece în stare de echilibru instabil, resortul începe să se extindă și corpul se îndepărtează la distanța  $r = r_2$  (în lipsa limitatorului 2 resortul se va extinde nelimitat). La mărirea vitezei unghiulare, limitatorul 2 menține corpul la această distanță. Micșorând viteza unghiulară a discului, corpul se va menține la aceeași distanță până la viteza  $\omega_2 < \omega_1$ .

La viteza  $\omega = \omega_2$  sistemul iarăși se află în stare de echilibru instabil și corpul trece în poziția inițială. În poziții intermediare  $r_1 < r < r_2$  sistemul nu poate să se afle.

Graficul dependenței  $r(\omega)$  are forma reprezentată în figura 5.

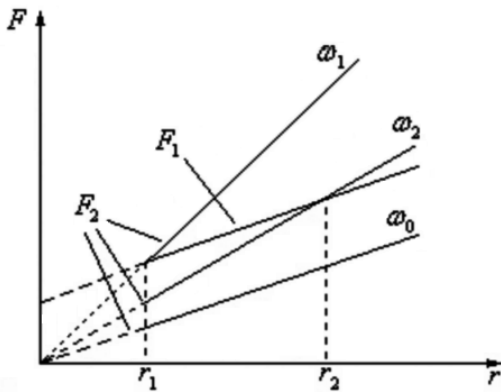


Fig. 4

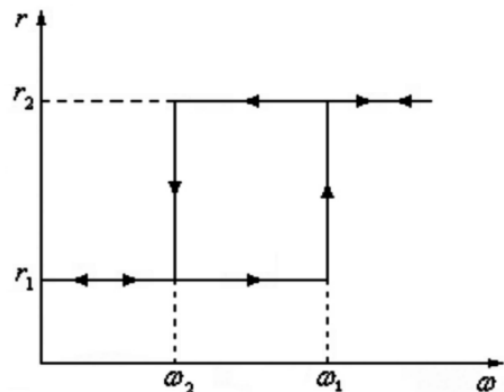


Fig. 5

Deci, obținem un fenomen analogic fenomenului de bistabilitate. Sistemul posedă două stări stabile. Trecerea din prima stare în a doua are loc pe o cale (la viteza  $\omega_1$ ), trecerea din starea a doua în prima are loc pe o altă cale (la viteza  $\omega_2 < \omega_1$ ). Acest fenomen ar putea fi aplicat, de exemplu, la schimbarea vitezelor în cazul unui automobil cu cutia de viteze automată.

c) Un corp este aruncat vertical în sus de la suprafața pământului cu viteza inițială  $v_1 = 15 \text{ m/s}$ . După intervalul de timp  $t_0 = 1 \text{ s}$ , de la înălțimea  $H$ , este aruncat al doilea corp cu viteza inițială  $v_2 = 3 \text{ m/s}$ . Peste cât timp se vor întâlni corpurile, dacă 1)  $H_1 = 12 \text{ m}$ ; 2)  $H_2 = 9 \text{ m}$ ? Se va considera  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Rezolvare:

Legile mișcării corpurilor sunt:

$$y_1 = v_1 t - \frac{g t^2}{2}, \quad (8)$$

$$y_2 = H + v_2 (t - t_0) - \frac{g (t - t_0)^2}{2}, \quad (9)$$

La momentul întâlnirii coordonatele corpurilor  $y_1$  și  $y_2$  sunt egale. Egalând expresiile din partea dreaptă ale ultimelor ecuații și făcând transformările respective obținem:

$$\begin{aligned}
v_1 t - \frac{gt^2}{2} &= H + v_2(t-t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2} \Rightarrow v_1 t - \frac{gt^2}{2} = H + v_2 t - v_2 t_0 - \frac{gt^2}{2} + 2 \frac{gt t_0}{2} - \frac{gt_0^2}{2} \Rightarrow \\
\Rightarrow v_1 t - v_2 t - g t t_0 &= H - v_2 t_0 - \frac{gt_0^2}{2} \Rightarrow t \cdot (v_1 - v_2 - g t_0) = H - v_2 t_0 - \frac{gt_0^2}{2} \\
\Rightarrow t &= \frac{H - v_2 t_0 - \frac{gt_0^2}{2}}{v_1 - v_2 - g t_0}
\end{aligned}
\tag{10}$$

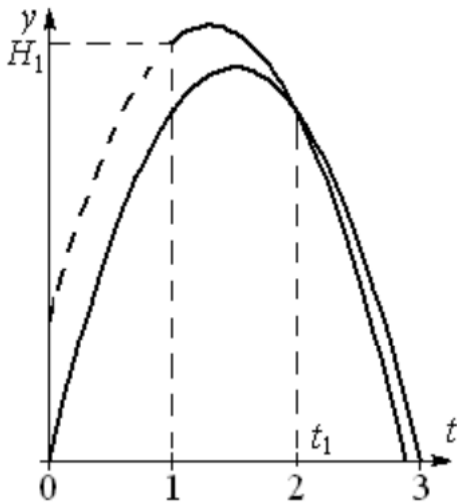


Fig. 4

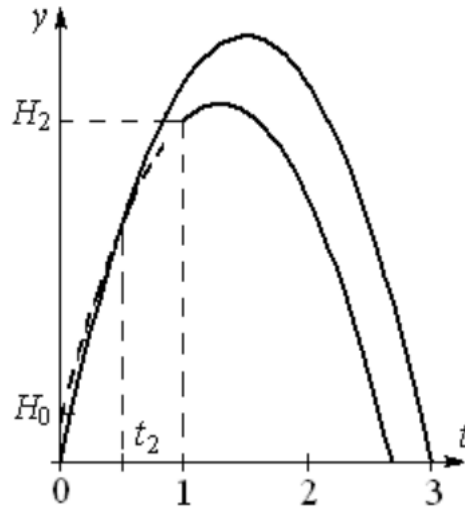


fig. 5

Înlocuind valorile numerice în expresia (10), obținem 1)  $t_1 = 2s$ ; 2)  $t_2 = 0,5s$ . A doua valoare evident nu este reală, deoarece corpurile nu pot să se întâlnească peste un timp  $t < t_0$ . Pentru a înțelege din ce cauză obținem aceste rezultate, reprezentăm grafic dependențele  $y = f(t)$  din expresiile (8) și (9) pentru primul caz (fig. 4) și pentru cazul al doilea (fig.

5)

Din figura 4 vedem că rezultatul obținut în primul caz satisface condițiile problemei, pe când în cazul al doilea, figura 5, obținem momentul de timp la care se vor întâlni corpurile dacă al doilea corp ar fi fost aruncat în același moment cu primul de la o înălțime  $H_0$  cu o astfel de viteză  $v_0$ , încât la înălțimea  $H$  să aibă viteza  $v_2$ .

d) Să se demonstreze că într-o mișcare curbilinie, accelerația unui punct este egală cu câtul dintre pătratul vitezei acestui punct și jumătatea corzii interceptate de cercul osculator pe direcția accelerației lui (fig. 6).

Rezolvare:

Așa cum planul osculator într-un punct al unei curbe în spațiu poate fi privit ca fiind poziția limită a planului determinat de trei puncte vecine, când ele se apropie indefinit de punctul dat, cercul osculator este poziția limită a unui cerc determinat de trei puncte vecine, atunci când acestea se apropie indefinit de punctul dat.

Cercul osculator reprezintă cercul unic care are proprietatea că este tangent la o curbă într-un punct al ei și are raza egală cu raza curbei în acel punct.

În geometria diferențială a curbelor, cercul osculator (sau cerc de curbură) al unei curbe într-un punct dat  $P$  este cercul limită către care tinde cercul dus din trei puncte  $M, N, P$  ale curbei, când punctele  $M$  și  $N$  tind către  $P$ .

Centrul acestui cerc se numește centrul de curbură al curbei în punctul  $P$ , iar raza se numește rază de curbură. Acest cerc aproximează curba în vecinătatea aceluși punct.

Punctul  $M$  mobil pe curba ( $C$ ) are accelerația  $\vec{a}_M = \overline{Mm}$ , care face unghiul  $\varphi$  cu normala principală  $MN$ .

Se construiește cercul osculator de rază  $\rho = OM$ . Componenta normală a lui  $\vec{a}_M$ ,

este  $\vec{a}_n = \overline{MM'}$ , având valoarea:

$$a_n = \frac{v_M^2}{\rho}$$

$$a_n = a_M \cos \varphi,$$

(11) Din egalarea relațiilor (11) și (12) rezultă:

dar

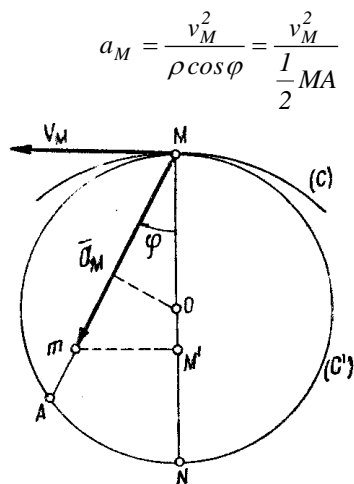


Fig. 6

### 3. Concluzii

Din cele expuse vedem că, utilizând metoda grafică de rezolvare a problemelor, putem explica sensul fizic al rezultatelor obținute (problema 1), sau putem explica fenomenele la care participă sistemul (problema 2). Rezolvând doar analitic problema 2 nu putem depista sau explica prezența efectului bistabilității.

Metoda grafică se utilizează cu succes pentru demonstrarea mai multor formule și legi, iar problemele grafice (care, de obicei, conțin în textul său un grafic), acoperă o bună parte din arealul problemelor. Pe de altă parte, o analiză profundă a rezultatelor obținute la rezolvarea problemelor de poate fi efectuată reprezentând grafic procesele la care este supus sistemul.

Rezolvarea grafică, de exemplu, ne permite să stabilim sensul fizic al rădăcinilor ecuațiilor pătrate (atunci când problema se reduce la rezolvarea unei astfel de ecuații) sau să explicăm procesele care au loc, atunci când sistemul trece prin anumite stări, pe care le vom numi metastabile. De asemenea problemele grafice sunt omniprezente la examene.

#### Bibliografie:

1. Chistol, V., *Despre aplicarea metodei grafice la rezolvarea unor probleme de fizică*, Revista de Fizică CYGNUS nr. 1/2010, pag.23-27
2. Chistol, V., *Utilizarea metodei grafice la rezolvarea unor probleme de fizică*, 4 th International Conference "Telecommunications, Electronics and Informatics" ICTEI 2012, Chisinau, 17—20 May 2012, pag. 427-430
3. \*\*\* [http://repository.utm.md/bitstream/handle/5014/7384/Conf\\_ICTEI\\_2012\\_Vol\\_2.pg427-430.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://repository.utm.md/bitstream/handle/5014/7384/Conf_ICTEI_2012_Vol_2.pg427-430.pdf?sequence=1&isAllowed=y),
4. \*\*\* Conf\_ICTEI\_2012\_Vol\_2.pg427-430.pdf

# ASPECTE PRIVIND DETERMINAREA MOMENTELOR DE INERȚIE FOLOSIND METODA PENDULULUI DE TORSIUNE

**Autori:** Ciprian-Daniel TROFIN <sup>1</sup>, Ciprian-Mihail STRAJA <sup>2</sup>,  
[trofy2012@yahoo.com](mailto:trofy2012@yahoo.com)

**Coordonator:** Asist.univ.dr.ing. Bogdan Ioan MARC <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Mașini și echipamente miniere, anul I

<sup>2</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Mașini și echipamente miniere, anul I

<sup>3</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea de I.M.E., Departamentul I.M.I.T.

## Rezumat

În această lucrare se studiază mișcarea oscilatorie a unui pendul de torsiune și se determină momentul de inerție al unui corp rigid (o placă) față de o axă de rotație ce trece prin centrul său de masă. Metodele folosite de măsurare a momentului de inerție față de o axă sunt cea care folosește suspensia monofilă și cea care folosește suspensia trifilă. Am determinat momentul de inerție cu ajutorul pendulului de torsiune cu suspensie monofilă și cu pendulul de torsiune cu suspensie trifilă.

## Cuvinte cheie

Pendul de torsiune, moment de inerție, suspensie monofilă, suspensie trifilă,

## 1. Introducere

În mecanica clasică, **momentul de inerție** (numit și *moment polar* sau *moment de ordinul doi* sau mai puțin adecvat *al doilea moment de inerție*) este o proprietate geometrică a unui corp, care măsoară inerția corpului pe măsură ce viteza sa unghiulară variază, o cantitate fizică utilizată în descrierea mișcării corpurilor în rotație în jurul unei axe. În mișcările de rotație, momentul de inerție joacă rolul pe care masa îl joacă în mișcările liniare. Are două forme: o formă scalară (adesea numită pur și simplu *moment de inerție*), utilizată atunci când axa de rotație este exact cunoscută, și o formă de tensor mai generală (numită *tensor de inerție*), care nu necesită cunoașterea axei de rotație.

Conceptul a fost introdus de Euler în cartea sa *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* în 1765. Momentul de inerție al unui corp față de o axă dată descrie cât de dificilă este schimbarea mișcării sale unghiulare în jurul propriei axe. Există două definiții distincte ale momentului de inerție: momentul de masă de inerție, adesea utilizat în dinamică și de obicei notat cu  $I$ , și momentul de inerție de suprafață, utilizat, de exemplu, în știința construcției și mai des denumit  $J$ . În sistemul internațional, unitatea de moment de inerție de masă este  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ,

ce pentru momentul de inerție de la suprafață este  $\text{m}^4$ .

### 1.1 Moment de inerție în masă.

Momentul de inerție al masei este definit ca al doilea moment al masei în raport cu poziția. Este o funcție a geometriei obiectului examinat, în special a modului în care masa este distribuită în interiorul acestuia. De exemplu, luați în considerare două discuri (A și B) de aceeași masă. Discul A are o rază mai mare decât discul B. Presupunând că au grosimea și masa distribuite uniform, este mai dificilă accelerarea discului A (modificarea vitezei sale unghiulare), deoarece masa sa este distribuită în așa fel încât să fie mai departe decât axa sa de rotație: masa care este cea mai îndepărtată de axă trebuie să aibă, având fixată viteza unghiulară, o viteză mai mult tangențială și, prin urmare, mai multă energie decât masa care este mai aproape de centrul de rotație. În acest caz, discul A are un moment de inerție mai mare decât discul B. Momentul de inerție în forma sa scalară este util pentru rezolvarea a numeroase probleme, de exemplu, explică de ce diferite obiecte care se rostogolesc (cum ar fi sferile, cilindrii sau inelele) pe un plan înclinat cu frecare o fac cu accelerații diferite. De exemplu, un inel va rula mai lent decât un disc cu aceeași masă și rază. De fapt, masa inelului este situată departe de centrul de rotație și, prin urmare, la aceeași viteză, energia cinetică acumulată de corp este mai mare. Cu toate acestea, pentru probleme mai complicate în care se modifică axa de rotație, tratamentul scalar este inadecvat, de exemplu în giroscop, sateliți și toate obiectele a căror aliniere se schimbă.

### 1.2 Moment de inerție al suprafeței.

Momentul de inerție de suprafață al figurilor plane în raport cu o axă este frecvent utilizat în ingineria civilă și ingineria mecanică. De fapt, este direct corelat cu rezistența secțiunii unui element supus la îndoire în raport cu sarcinile ortogonale față de axa de referință. În practică, momentul de inerție este o cantitate care indică rezistența unei figuri plane la rotire față de o axă de referință: cu cât este mai mare momentul de inerție, cu atât este mai mică capacitatea de rotire pe care o va arăta secțiunea. Cazul tipic este cel al fasciculului. Dacă forțele de pe fascicul au direcția  $y$ , momentul de inerție al secțiunii se calculează în funcție de axa  $x$  (ortogonală la  $y$ ) care trece prin centrul de greutate al secțiunii fasciculului. În practică, cu același material, cu cât este mai mare momentul de inerție, cu atât este mai rezistentă grinda. Mai mult, cu cât materialul este mai departe de axa care trece prin centrul său de greutate, cu atât

crește momentul de inerție. Pentru a realiza acest lucru, este suficient să reținem că în următoarele formule pentru calcularea momentului de inerție înălțimea  $h$  a diferitelor figuri este cu exponent 3. Grinzile de otel au adesea o secțiune I (IPE sau NP) sau H (Profiluri HE), tocmai pentru a exploata materialul cât mai mult posibil, plasându-l departe de centrul de greutate al secțiunii.

Pendulul, este un corp solid care poate oscila în jurul unui punct fix sau al unei axe fixe când este scos din poziția de echilibru stabil. *Pendulul de torsiune*, este un exemplu de mișcare sinusoidală a unui corp suspendat de un fir (suspensie monofilară), de trei (suspensie trifilară), sau chiar patru fire.

## 2. Generalități

Una din mișcările importante întâlnite în natură este *mișcarea oscilatorie* (o particulă oscilează când se deplasează periodic în jurul unei poziții de echilibru), în care deplasarea poate fi exprimată prin funcția dată de rel. 1:

$$x = x_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (1)$$

O astfel de mișcare, continuându-se (în mod theoretic) la infinit, poartă numele de *vibrație armonică*.

Mărimea variabilă  $x$  se numește *elongație*. În teoria vibrațiilor mecanice ea poate fi o *deplasare* sau un unghi.

Mărimea  $x_0$ , reprezentând valoarea maximă a elongației, este *amplitudinea* vibrației.

Mărimea  $\omega$ , măsurată în rad/s (sau, ceea ce este același lucru, în  $s^{-1}$ ) este *pulsația* vibrației.

Argumentul  $\varphi$  se numește *fază la originea timpului*.

Drumul și/sau spațiul parcurs de mobil între două treceri succesive identice prin aceeași poziție (aflându-se în același loc și mergând în același sens) formează o *perioadă* sau un *ciclu al vibrației*. Perioada unei vibrații se măsoară prin durata de timp calculată cu relația:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2)$$

Inversul perioadei este *frecvența* vibrației, notată cu simbolul  $f$  sau  $\nu$  și se determină cu relația:

$$f = \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3)$$

Unitatea de măsură a frecvenței este Hertz –ul care este egal cu:

$$1\text{Hz} = 1\text{per./s} \quad (4)$$

Vibrația unui sistem elastic, efectuată numai în urma unui impuls inițial, poartă numele de *vibrație proprie* sau *vibrație liberă*. Pulsația ei este *pulsația proprie* a vibrației și se notează de obicei cu  $p$ . În acest caz, ecuația vibrației armonice se scrie :

$$x = x_0 \sin(p \cdot t + \varphi) \quad (5)$$

Dacă mișcarea vibratorie se află sub efectul unei forțe periodice, care o întreține, ea se numește *vibrație forțată* sau *vibrație întreținută*.

O vibrație a cărei amplitudine scade mereu cu timpul, datorită diverselor frecări din interiorul materialului sau din exterior, este vibrație amortizată.

Dintre mișcările oscilatorii cea mai des întâlnită în fenomenele naturale și care utilizează un model matematic simplu este mișcarea sinusoidală.

Cele mai simple mișcări oscilatorii sunt acelea cu un singur grad de libertate, care au o singură masă concentrată a cărei mișcare este definită printr-un singur parametru.

Ca exemple de astfel de sisteme, se pot cita:

- sistemul oscilant format din o masă  $m$  atârnată de un arc elicoidal vertical, de masă neglijabilă;
- pendulul simplu, la care variabila este unghiul  $\varphi$ ;
- o masă concentrată  $m$  oscilând transversal la capătul unei lame elastice de masă neglijabilă. Sistemul are un singur grad de libertate, dacă se ia ca variabilă numai deplasarea transversală a masei  $m$ ;
- un disc în vibrație de răsucire, așezat la capătul unei bare (sau fir) verticale de masă neglijabilă.

Ca aplicații ale mișcării sinusoidale, sunt:

- *Pendulul simplu*, definit ca un punct material greu de masă  $m$  suspendat de un punct  $O$  printr-un fir de lungime  $l$  de masă neglijabilă. Dacă punctul  $m$  este deplasat lateral, după care este lăsat liber, atunci punctul  $m$  va oscila;
- *Pendulul compus*, este un corp solid cu greutate proprie care poate oscila liber în jurul unei axe orizontale sub acțiunea greutății;
- *Pendulul de torsiune*, este un alt exemplu de mișcare sinusoidală a unui corp suspendat de un fir (suspensie monofilară), de trei (suspensie trifilară), sau chiar patru fire.

Astfel, pendulul, este un corp solid care poate oscila în jurul unui punct fix sau al unei axe fixe când este scos din poziția de echilibru stabil.

## 3. Metode de calcul folosite



a) *Suspensia monoșilară*

Ecuția diferențială a mișcării plăcii este:

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} + \frac{GI_p}{L} \theta = 0 \quad ; \text{ sau } \ddot{\theta} + \alpha^2 \theta = 0, \quad (6)$$

în care:

$$\alpha^2 = \frac{GI_p}{L \cdot J_{\Delta}}, \quad (7)$$

În aceste relații  $G$  este modulul de elasticitate transversal al firului (pentru oțel  $G = 1,5 \cdot 10^5 \text{ daN/cm}^2$ ),  $I_p$  este momentul de inerție polar geometric al secțiunii firului:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad (d - \text{diametrul firului}) \quad (8)$$

$l$  - este iungimea firului, iar  $J_{\Delta}$  este momentul de inerție axial mecanic al plăcii față de axa de rotație (OO' pe figura 18.1).

Soluția ecuației (6) este:

$$\theta = A_1 \sin(\alpha t + \varphi_1), \quad (9)$$

în care  $A_1$  și  $\varphi_1$  sunt constante de integrare.

Perioada acestor oscilații este:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta} L}{GI_p}}, \quad (10)$$

de unde rezultă:

$$J_{\Delta} = \frac{GI_p T_1^2}{4\pi^2 L}, \quad (11)$$

b) *Suspensia trișilară*

În cazul oscilațiilor mici (cu unghiuri de rotație până la  $6^\circ - 8^\circ$ ) ecuația diferențială a mișcării plăcii este:

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} + \frac{Qr^2}{L} \theta = 0 \quad ; \text{ sau } \ddot{\theta} + \beta^2 \theta = 0, \quad (12)$$

în care:

$$\beta^2 = \frac{Qr^2}{L \cdot J_{\Delta}}, \quad (13)$$

Soluția ecuației este:

$$\theta = A_2 \sin(\beta \cdot t + \varphi_2), \quad (14)$$

$A_2$  și  $\varphi_2$  fiind constante de integrare.

Perioada acestor oscilații este:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta} L}{Qr^2}}, \quad (15)$$

de unde rezultă:

$$J_{\Delta} = \frac{Qr^2 T_2^2}{4\pi^2 L}, \quad (16)$$

### 3.1 Pendulul de torsiune cu suspensie monofilară

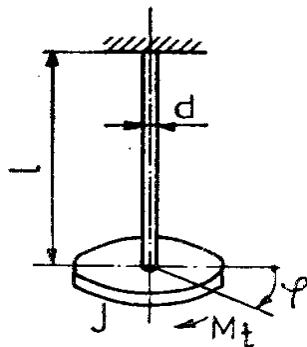


Fig. 1. Pendulul de torsiune monofilar

Se pune problema să studiem vibrația sistemului oscilant din fig. 1, format dintr-un volant de diametru  $D$ , având momentul de inerție față de axa de rotație  $J$  și un arbore (sau fir) de masă neglijabilă cu diametrul  $d$  și lungimea  $l$ , având constanta elastică  $k$ .

Aplicând un cuplu exterior  $M_t$ , volantul se rotește cu unghiul  $\varphi$ , iar cuplul este echilibrat prin cuplul forțelor elastice ale arborelui -  $k\varphi$ . În acest fel se stabilește o stare de echilibru. Dacă cuplul exterior dispare, sistemul intră în oscilații de torsiune. Luând ca variabilă unghiul  $\varphi$ , ecuația diferențială a mișcării de rotație este:

$$J\ddot{\varphi} = -k\varphi, \quad (17)$$

respectiv:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{J}\varphi = 0, \quad (18)$$

Se notează:

$$\frac{k}{J} = p^2, \quad (19)$$

și rezolvarea se face în felul cunoscut

$$\ddot{\varphi} + p^2\varphi = 0, \quad (20)$$

$$\varphi = A \cos pt + B \sin pt$$

Luând condițiile inițiale

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \end{cases}, \quad (21)$$

se ajunge la ecuația mișcării

$$\varphi = \varphi_0 \cos pt + \frac{\dot{\varphi}_0}{p} \sin pt, \quad (22)$$

sau

$$\varphi = \Phi \sin(pt + \theta), \quad (23)$$

Unde

$$\Phi = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{p}\right)^2}, \quad \text{tg } \theta = \frac{\varphi_0 p}{\dot{\varphi}_0}, \quad (24)$$

Pentru un arbore de lungime  $l$  și diametrul  $d$ , constanta elastică de răsucire este:

$$k = \frac{GI_p}{l} = \frac{G\pi d^2}{32l}, \quad (25)$$

Această valoare s-a dedus din formula deformației de răsucire:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t l}{GI_p} \quad (26)$$

facînd  $\Delta\varphi = l$  și calculînd cuplul corespunzător.

Momentul de inerție al unui disc plin (volant), de greutate  $P$  și diametrul  $D$ , este:

$$J = \frac{mD^2}{8} = \frac{PD^2}{8g} \quad (27)$$

iar al discului cu obada subțire (v. roata de la o căruță, roata de antrenare șurub robinet etc.) de diametru mediu  $D$ , neglijînd masa spițelor este:

$$J = \frac{mD^2}{4} = \frac{PD^2}{4g} \quad (28)$$

### 3.2 Pendulul de torsiune cu suspensie trifilară

Se pune problema să studiem vibrația sistemului oscilant din fig. 2. format dintr-un volant (platformă) de diametru  $D = 2R$ , avînd momentul de inerție față de axa de rotație  $J$  și suspendat de trei fire de lungime  $l$  dispuse simetric și fixate la periferia platformei. Firele sunt fixate în partea superioară de un disc de rază  $r$ , fix.

Dacă punem în mișcare platforma, printr-o mică deplasare unghiulară cu un unghi  $\alpha_0$ , aceasta va avea o mișcare oscilatorie. În această mișcare, platforma se rotește de-o parte și de alta a poziției de echilibru, și în același timp se ridică și coboară cu înălțimea  $h$  față de poziția de echilibru.

Pentru rezolvare se scrie că în orice moment suma energiilor cinetică și potențială este constantă.

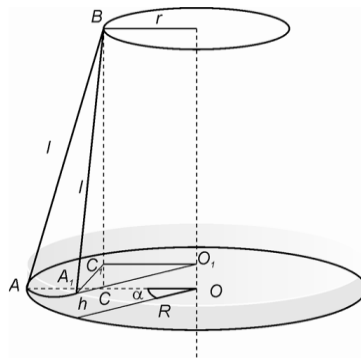


Fig. 2 Pendulul de torsiune trifilar

Energia potențială a platformei în punctul de înălțime maximă (energie cinetică nulă) este:

$$E_p = m_0 g h \quad (29)$$

care se transformă în energie cinetică, când platforma trece prin poziția de echilibru:

$$E_c = \frac{J_0 \omega^2}{2} \quad (30)$$

unde  $J_0$  ( $J_0 = J_A$ ) este momentul de inerție față de axa de rotație (indicele zero este pentru că axa de rotație trece prin centrul de masă al sistemului) iar  $\omega$  este viteza unghiulară a corpului când trece prin poziția de echilibru.

Dacă  $\alpha$  este deplasarea unghiulară (mică) înălțimea la care se ridică platforma este (fig. A18.2),

$$h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}$$

care se calculează astfel:

$h$  se poate calcula din  $h = BC - BC_1$ ;

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = l^2(R-r)^2, BC_1^2 = A_1B^2 - A_1C_1^2 = l^2 - A_1C_1^2, A_1C_1 \text{ rezultă din :}$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{O_1C_1} - \overrightarrow{O_1A_1},$$

adică

$$A_1C_1^2 = O_1C_1^2 + O_1A_1^2 - 2O_1C_1 \cdot O_1A_1 \cdot \cos\alpha$$

$$A_1C_1^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos\alpha$$

$$BC_1^2 = l^2 - r^2 - R^2 + 2rR\cos\alpha$$

$$h = \frac{BC^2 - BC_1^2}{BC + BC_1} = \frac{2rR(1 - \cos\alpha)}{BC + BC_1}$$

adică,

$$h = \frac{4rR \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{BC + BC_1}$$

Dacă unghiul  $\alpha$  este mic,  $\sin\alpha \cong \alpha$ .

Dacă  $l$  este mult mai mare decât diferența  $(R - r)$ , atunci:

$$BC + BC_1 \cong 2l$$

iar  $h$  va fi:

$$h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}$$

Dacă energiile cinetică și potențială a unui corp depind de coordonata  $q$  după legile:

$$E_c = \frac{A\dot{q}^2}{2} \quad \text{și} \quad E_p = \frac{Bq^2}{2} \quad (31)$$

mișcarea corpului este una oscilatorie, cu perioada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{B}} \quad (32)$$

În cazul nostru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{IJ_\Delta}{m_0grR}} \quad (33)$$

Măsurând perioada unui astfel de pendul, putem calcula momentul de inerție al corpului care se rotește, în cazul nostru momentul de inerție al platformei:

$$J_O = J_\Delta = \frac{m_0grR}{4\pi^2l} T^2 \quad (34)$$

Dacă raza platformei  $R$  și a discului  $r$  sunt egale ( $r = R$ ) atunci vom avea:

$$J_O = J_\Delta = \frac{m_0gR^2}{4\pi^2l} T^2 \quad (35)$$

#### 4. Concluzii

În urma celor prezentate putem concluziona următoarele :

- momentul de inerție al unui corp rigid (o placă) față de o axă de rotație se poate determina cu ajutorul pendulului de torsiune cu suspensie monofilară și cu pendulul de torsiune cu suspensie trifilară.
- pendulul, este un corp solid care poate oscila în jurul unui punct fix sau al unei axe fixe când este scos din poziția de echilibru stabil.

#### Bibliografie:

1. Huidu T., Marin C., Probleme rezolvate de mecanică, Editura Macarie Târgoviște, 2001
2. Itu Razvan B., *Mecanică*, Îndrumător pentru lucrări de laborator, Editura Universitas Petroșani, 2021
3. <https://ro.wikipedia.org>

# REZULTATE OBȚINUTE ÎN ESTIMAREA CALITĂȚII UNOR COMPONENTE ALE TRANSPORTORULUI TAGOR 260/750

**Autori:** Tudor-Bujor VOINA<sup>1</sup>, Mugurel NEAG<sup>2</sup>  
[TudorVoina@outlook.com](mailto:TudorVoina@outlook.com), [mugurelneag@yahoo.com](mailto:mugurelneag@yahoo.com)

**Coordonator:** Conf. univ. dr. ing. Vlad Alexandru FLOREA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea IME, specializarea: Mașini și Echipamente Miniere, anul IV

<sup>2</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea IME, specializarea: Ingineria Transportului și a Traficului, , anul IV

<sup>3</sup> Universitatea din Petroșani, Facultatea IME, Departamentul: DIMIT

## Rezumat

Cunoașterea caracteristicilor de calitate (fiabilitate și mentenabilitate) a unui produs sau echipament este esențială, fie că este vorba despre un sistem simplu sau unul complex. Fiabilitatea condiționează mentenanța, duratele de viață ale produselor și echipamentelor, precum și un nivel de securitate acceptabil al acestora. Uzura și reînnoirea echipamentelor sunt generatoare de costuri, care trebuie gestionate într-o manieră eficientă, motiv pentru care se pune accentul pe un nou câmp de investigație care are ca scop reducerea acestora. Acest lucru se bazează în principal pe modelarea timpilor de apariție a defectelor în timp și a timpilor de remediere.

Prin lucrare se urmărește stabilirea fiabilității și mentenabilității echipamentelor tehnologice, respectiv a unui rulment din componența reductorului transportorului Tagor, care înregistrează un număr ridicat de defectări, luând în considerare bazele de date provenite din exploatarea EM Lupeni, în perioada 2015-2017.

## Cuvinte cheie

*Rulment, fiabilitate, mentenabilitate, lege de distribuție.*

## 1. Introducere

Complexul mecanizat de abataj tip TAGOR este un complex de tip nou care este format din:

- susținerea mecanizată tip TAGOR-18/37;
- transportorul de abataj TAGOR 260/750;
- combina de abataj KSW- 460NE.

Utilajele tehnologice din acest complexul mecanizat TAGOR sunt compatibile corespunzător următoarelor caracteristici :

- |   |                 |
|---|-----------------|
| - înălțime de lucru secție                        | 2000-3600 mm;   |
| - înălțime de lucru combină                       | 1600-3521 mm;   |
| - productivitate/capacitate transport combină     | circa 1000 t/h; |
| - productivitate/capacitate transport transportor | circa 1000 t/h; |
| - lățime tăiată/pas ripare-pășire combină         | 800 mm;         |
| - lățime tăiată/pas ripare-pășire secție          | 800 mm.         |

## 2. Legi de distribuție utilizate în studiul fiabilității și mentenabilității echipamentelor industriale

### 2.1. Legea de distribuție exponențială

Modelul exponențial se utilizează atunci când rata sau intensitatea de defectare  $\lambda$  este constantă, care, conform modelului „cadă de baie” începe la sfârșitul perioadei inițiale și se sfârșește la începutul etapei finale sau de bătrânețe, dar se poate aplica cu succes și în cazul modelării mentenabilității sistemelor mecanice, când rata sau intensitatea de reparare,  $\mu$ , se poate considera constantă.

Probabilitatea ca produsul să nu se defecteze în perioada de timp (0, t) este:

$$R(t; \lambda) = \exp(-\lambda t) \quad (1)$$

Valoarea medie a acestei distribuții, respectiv media timpului de bună funcționare,

$$m = MTBF = \frac{1}{\lambda} \quad (2)$$

### 2.2. Legea de distribuție normală (Gauss-Laplace)

Legea normală își găsește aplicabilitatea în cazul proceselor influențate de un număr mare de factori aleatorii. În fiabilitate distribuția normală caracterizează fenomenele de îmbătrânire mecanică, electrică, termică etc. a elementelor și sistemelor.

Funcția:

$$\Phi(u) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi}) \int_0^u e^{-u^2/2} du \quad (3)$$

se numește funcția integrală a lui Laplace, iar  $u$  cuantila funcției Laplace.

Funcția de fiabilitate pentru un model normal al defectărilor este dată de relația:

$$R(t; m, \sigma) = 1/2 - \Phi[(t - m)/\sigma] \quad (4)$$

în care  $m$  și  $\sigma$ , media, respectiv abaterea medie pătratică, sunt parametrii repartiției.

### 2.3. Legea de distribuție lognormală (Dalton)

Repartiția lognormală este utilizată pentru modelarea sistemelor tehnice care se degradează datorită fenomenul de oboseală termică. De asemenea, această distribuție este folosită în analiza mentenanței sistemelor tehnice.

Funcția de fiabilitate este:

$$R(t; m, \sigma) = 1/2 - \Phi[\ln(t - m) / \sigma] \quad (5)$$

### 2.4. Legea de distribuție Weibull

Domeniul de aplicabilitate cuprinde modelele de defectare determinate de procesele de degradare cum ar fi oboseala, coroziunea, difuziunea sau abraziunea mecanică, precum și în fenomene ce privesc rezistența materialelor și timpii de defectare a componentelor electronice și mecanice.

#### Distribuția Weibull biparametrică normată

Se poate exprima repartiția Weibull biparametrică într-o formă mai avantajoasă prin substituirea parametrului  $\lambda$  și normarea timpului printr-o constantă  $\eta$  care reprezintă parametrul de scară reală,  $\beta$  fiind parametrul de scară.

Probabilitatea ca produsul să nu se defecteze în intervalul de timp (0, t) este:

$$R(t/\eta; \beta) = 1 - F(t/\eta; \beta) = \exp\{-(t/\eta)^\beta\} \quad (6)$$

#### Distribuția Weibull triparametrică

Acest model de repartiție constituie o variantă completă fiind utilizați trei parametri:  $\beta$  - parametrul de formă;  $\eta$  - parametrul de scară, sau de scală, sau viața caracteristică, adică durata de viață până la care vor avea loc 63,2% din defectări;  $\gamma$  - durata minimă de viață, sau parametrul de localizare, de poziție sau inițializare.

Funcția de fiabilitate, adică probabilitatea ca produsul să nu se defecteze în intervalul (0, t) este:

$$R(t; \eta, \beta, \gamma) = \exp\{-(t - \gamma)/\eta\}^\beta \quad (7)$$

## 3. Estimarea parametrilor de calitate pentru rulmentul reductorului transportorului Tagor

### 3.1. Estimarea parametrilor de fiabilitate

Din baza de date analizată rezultă timpii de funcționare efectivă a rulmentului, reprezentați prin seria statistică formată din  $n=20$  valori (ordonate crescător), în ore de funcționare, până la apariția unui defect: 21,5; 18,75; 16,5; 27,75; 29,5; 31,5; 19,25; 14,75; 27,5; 22,5; 24,75; 26,5; 22,5; 18,5; 17,75; 19,75; 18,5; 27,5; 25,25; 24,25.

Datele astfel obținute au fost rulate în softul Weibull++ obținându-se: clasamentul diferitelor legi de distribuție (Figura 1), legea de distribuție adoptată (Figura 2), probabilitatea de acceptare a legii de distribuție (Figura 3). După adoptarea legii de distribuție, în general cea cu probabilitatea de acceptare cea mai mare sau reprezentat grafic: probabilitatea de defectare (Figura 4), nonfiabilitatea (Figura 5), fiabilitatea (Figurile 6 și 7), funcția densității de probabilitate (Figura 8) și rata defectărilor (Figura 9).

	Ranking	LKV	BIC	AIC
Lognormal	1	-58,9	123,8	121,8
Normal	2	-59	123,9	121,9
2P-Weibull	3	-59,1	124,1	122,1
Gamma	4	-59,3	124,7	122,7
Loglogistic	5	-59,6	125,3	123,3
3P-Weibull	6	-58,6	126,1	123,1
Logistic	7	-59,7	125,4	123,4
Gumbel	8	-60,4	126,9	124,9
G-Gamma	8	-59,3	127,6	124,6
2P-Exponential	9	-61,8	129,6	127,6
1P-Exponential	10	-84,3	171,5	170,6

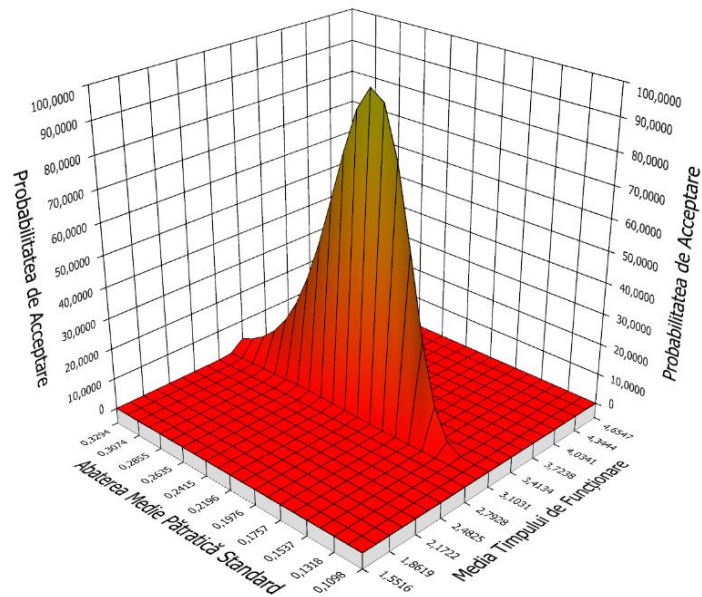
Fig. 1. Clasament lege de distribuție

Results Report	
Report Type	Weibull++ Results
User Info	
Name	Vlad Alexandru Florea
Company	University of Petrosani
Date	13.04.2022
Parameters	
Distribution	Lognormal 2P
Analysis	RRX
CB Method	FM
Ranking	MED
Log-Mean (hr)	3,103134
Log-Std	0,219586
LK Value	-58,911794
Rho	0,9873
Fail \ Susp	20 \ 0
LOCAL VAR/COV MATRIX	
Var-LnMu=0,002411	LnCoVar=5,288747E-11
LnCoVar=5,288747E-11	Var-LnSigma=0,001473

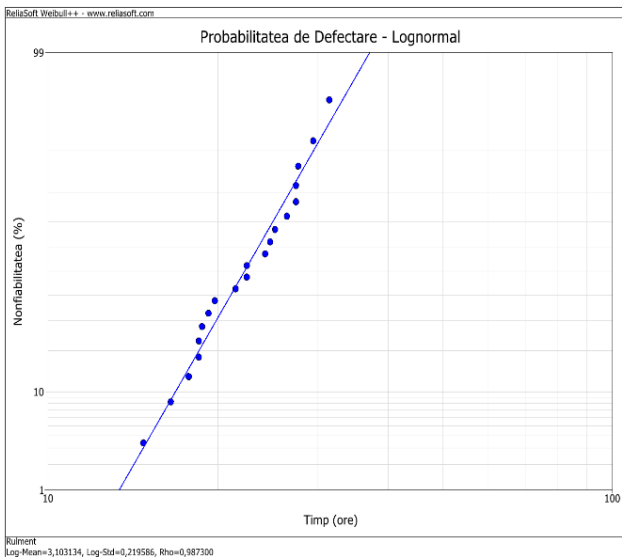
Fig. 2. Lege de distribuție

Din aceste reprezentări rezultă valori relativ scăzute ale fiabilității rulmentului, probabilitatea ca el să nu se defecteze după 23,5 de ore de funcționare efectivă fiind de 40% (marja de risc de 40% fiind foarte mare), de aceea trebuie să ne așteptăm ca la circa 3 zile de funcționare a transportorului, rulmentul să se defecteze.

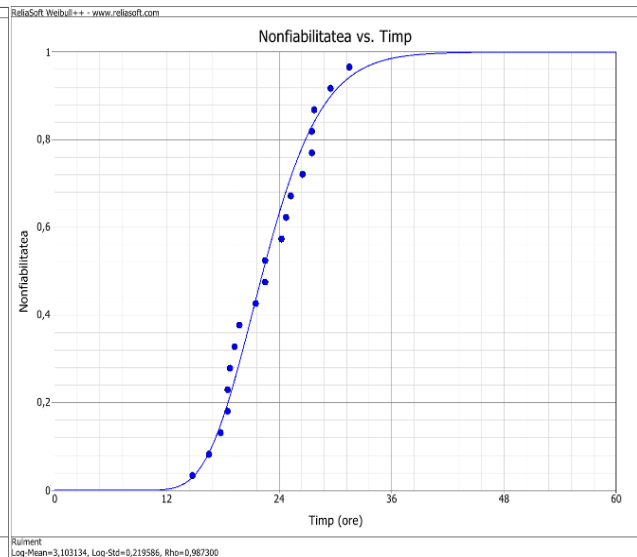
Dacă se impune o fiabilitate de 80%, care este o valoare rezonabilă în tehnică, rezultă un timp de funcționare fără defectare de 18,5 ore, ceea ce înseamnă că după circa două zile de funcționare este necesar să se intervină pentru repararea rulmentului.



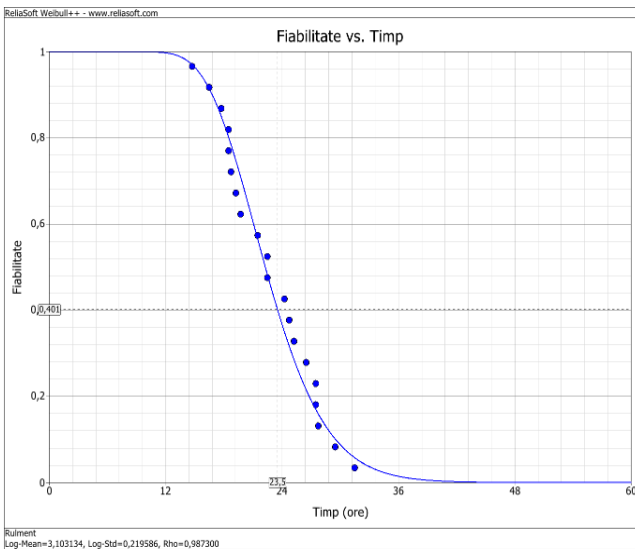
**Fig. 3.** Probabilitatea de acceptare a legii de distribuție



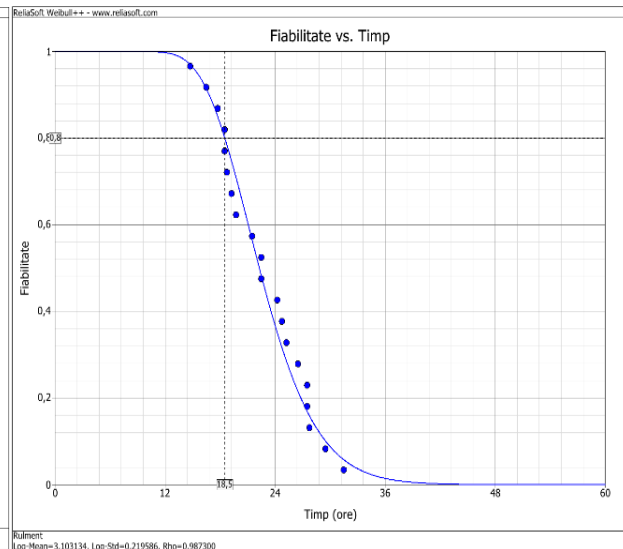
**Fig. 4.** Probabilitatea de defectare



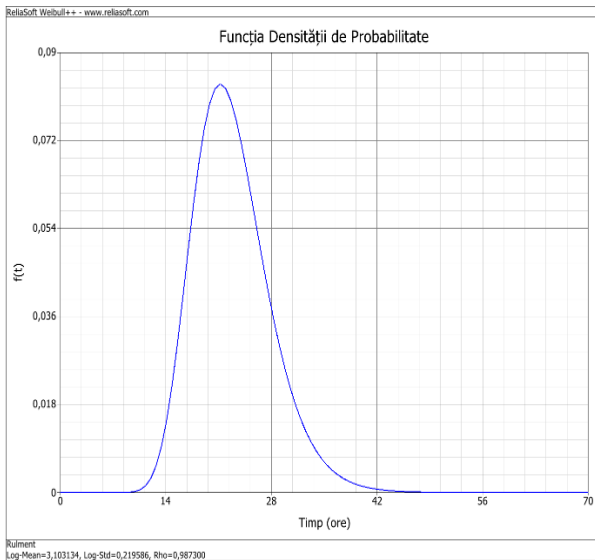
**Fig. 5.** Nonfiabilitatea



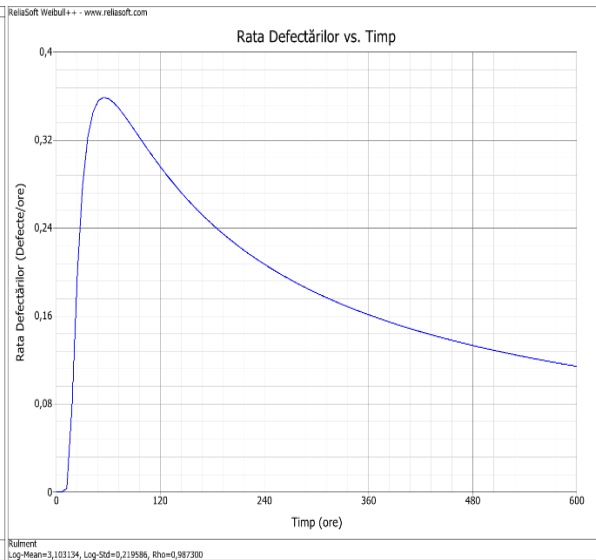
**Fig. 6.** Fiabilitatea (40%)



**Fig. 7.** Fiabilitatea (80%)



**Fig. 8.** Funcția densității de probabilitate



**Fig. 9.** Rata defectărilor

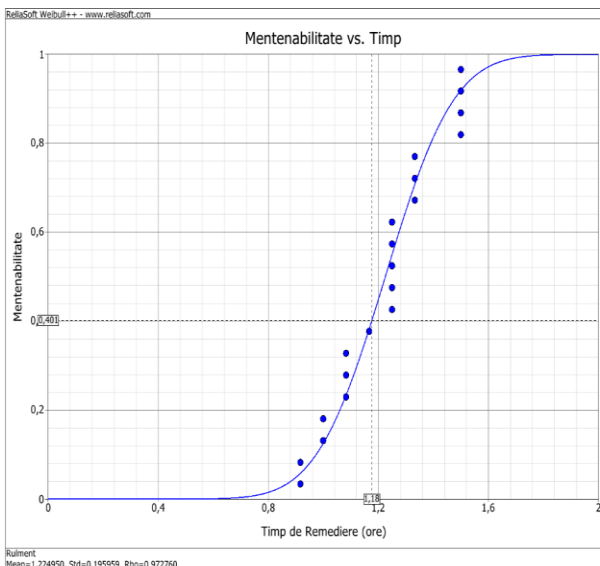
### 3.2. Estimarea parametrilor de mentenabilitate

	Ranking	LKV	BIC	AIC
Normal	1	5,16	-4,3	-6,3
2P-Weibull	2	5,09	-4,2	-6,2
Lognormal	3	5	-4	-6
Gamma	4	4,75	-3,5	-5,5
Logistic	5	4,47	-2,9	-4,9
Loglogistic	6	4,33	-2,7	-4,7
Gumbel	7	4,31	-2,6	-4,6
3P-Weibull	8	5,28	-1,6	-4,6
G-Gamma	9	4,85	-0,7	-3,7
2P-Exponential	10	3,3	-0,6	-2,6
1P-Exponential	11	-26,3	55,6	54,6

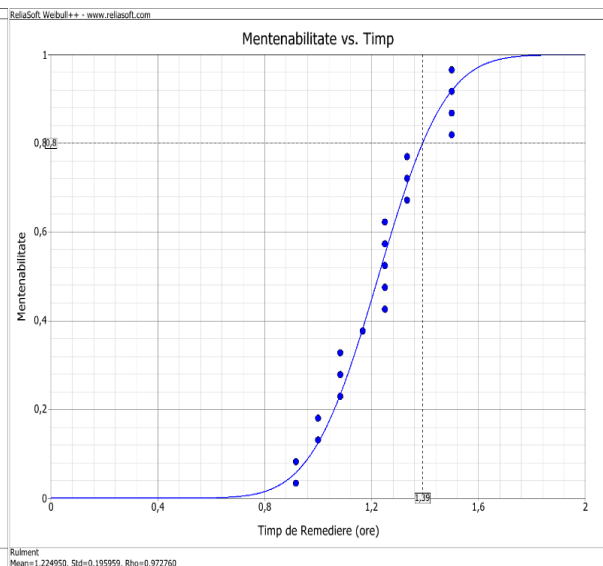
**Fig. 10.** Clasament lege de distribuție

Results Report	
Report Type	Weibull++ Results
<b>User Info</b>	
Name	Vlad Alexandru Florea
Company	University of Petrosani
Date	13.04.2022
<b>Parameters</b>	
Distribution	Normal 2P
Analysis	RRX
CB Method	FM
Ranking	MED
Mean (hr)	1,22495
Std (hr)	0,195959
LK Value	5,162855
Rho	0,97276
Fail \ Susp	20 \ 0
<b>LOCAL VAR/COV MATRIX</b>	
Var-Mu=0,001920	CoVar=4,017004E-11
CoVar=4,017004E-11	Var-Sigma=0,001118

**Fig. 11.** Lege de distribuție



**Fig. 12.** Mentenabilitatea (40%)

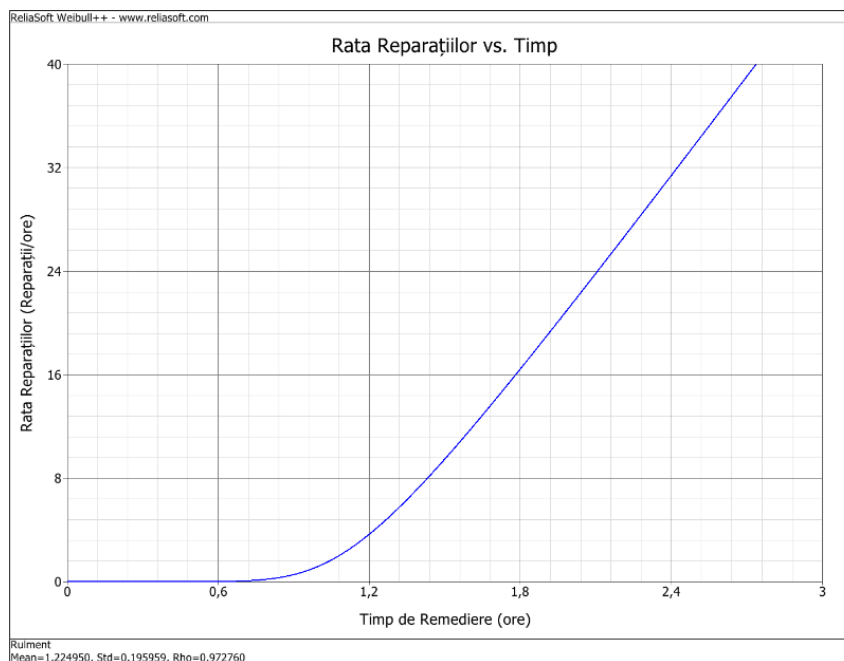


**Fig. 13.** Mentenabilitatea (80%)



Din baza de date analizată rezultă timpii de schimbare a rulmentului, reprezentați prin seria statistică formată din n=20 valori (ordonate crescător), în ore de funcționare: 0,917; 0,917; 1; 1; 1,083; 1,083; 1,083; 1,167; 1,25; 1,25; 1,25; 1,25; 1,333; 1,333; 1,333; 1,5; 1,5; 1,5; 1,5.

Datele astfel obținute au fost rulate în softul Weibull++ obținându-se: clasamentul diferitelor legi de distribuție (Figura 10), legea de distribuție adoptată (Figura 11). După adoptarea legii de distribuție, în general cea cu probabilitatea de acceptare cea mai mare sau reprezentat grafic: mentenabilitatea (Figurile 12 și 13) și rata reparațiilor (Figura 14).



**Fig. 14. Rata reparațiilor**

Din analiza graficelor mentenabilității se observă că probabilitatea ca rulmentul să fie înlocuit în 1,18 ore este de doar 40 %, în timp ce pentru a avea o siguranță de 80 % că rulmentul va fi schimbat este nevoie de 1,39 de ore.

#### **4. Concluzii**

Analiza de fiabilitate și mentenabilitate efectuată asupra rulmentului reductorului transportorului Tagor conduce la faptul că fiabilitatea redusă a rulmentului se datorează utilizării improprie a transportorului, prin procesarea de cărbune în amestec cu steril în cantități și dimensiuni considerabile, fiind depășite prescripțiile de utilizare impuse prin documentația de utilizare a acestora.

Reducerea timpului de înlocuire a rulmentului poate fi realizată prin adoptarea unei strategii de mentenanță preventiv-planificată.

#### **Bibliografie:**

1. D. Brânzan, *Teză de doctorat*, 2012;
2. Dumitrescu I., Florea V.A. – *Desen tehnic industrial utilizând soft-uri CAD*, Editura Universitas, Petroșani, ISBN 978-973-741-596-7, 2018;
3. Florea V. – *Fiabilitatea și mentenanța produselor – îndrumător de laborator*, Editura Universitas, Petroșani, ISBN 978-973-741-240-9, 2011;
4. Vlad Alexandru Florea - *Mentenanța echipamentelor industriale*, Petroșani, Editura Universitas, ISBN 978-973-741-681-0, 2020;

# POSSIBILITĂȚI DE RECONDIȚIONARE ALE ECHIPAMENTELOR TEHNOLOGICE

**Autor: Costel VRĂJITOAREA<sup>1</sup>**

[Bennq17@gmail.com](mailto:Bennq17@gmail.com),

**Coordonator: Conf. univ. dr. ing. Vlad Alexandru FLOREA<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Universitatea din Petroșani, Facultatea IME, specializarea: Echipamente pentru Procese Industriale, anul IV*

<sup>2</sup> *Universitatea din Petroșani, Facultatea IME, Departamentul: DIMIT*

## Rezumat

În lucrarea de față s-a tratat problema reabilitării suprafețelor uzate ale jgheburilor transportoarelor cu raclete; s-a urmărit realizarea unui material compozit având compusul de ranforsare cu o duritate de 1100÷1300 HV, compusul fiind inserat într-o matrice feroasă, cu duritatea de 46÷52 HRC.

Materialele compozite au fost studiate anterior utilizării lor pentru reabilitarea jgheburilor de transportor, în condiții de laborator, pentru verificarea caracterului anticânteie în vederea prevenirii pericolului de producere a exploziei, în condițiile utilizării lor în exploatarea miniere cu emanații de gaz metan.

## Cuvinte cheie

*Jgheab, recondiționare, uzură, defecte, materiale compozite.*

## 1. Introducere

Producția industrială modernă impune funcționarea la parametrii optimi, fără întreruperi sau opriri accidentale a echipamentelor tehnologice, pentru a se asigura obținerea unei producții de calitate, dar și o eficiență economică ridicată.

Echipamentele tehnologice utilizate în exploatarea subterană realizează patru operații principale: dislocarea rocilor, încărcarea și transportul lor, precum și susținerea lucrărilor. Costurile de achiziție a acestor echipamente sunt foarte ridicate, astfel încât se impune, cu necesitate, reabilitarea unora din subansamblele și piesele lor de schimb.

În cazul în care materialul dislocat este cărbune ce se exploatează prin metode mecanice, combinele de tăiere utilizate în abatajele cu front lung ca și transportoarele cu raclete suferă uzuri importante (Figura 1).



**Fig. 1.** *Jgheab uzat de transportor cu raclete*

Soluțiile tehnologice adoptate de firmele constructoare diferă în funcție de condițiile geologice de lucru; astfel, combinele de abataj pentru exploatarea subterană se realizează cu organe de tăiere în construcție sudată (Figura 2) sau turnată.

Construcția turnată are avantajul simplificării procesului de fabricație prin reducerea numărului de repere și a prelucrărilor ulterioare, dar necesită o pregătire a fabricației mai complexă, mai costisitoare, iar în cazul organelor de tăiere având elicele de grosime relativ mică și de suprafață mare, o tehnică corespunzătoare de turnare.

Când numărul produselor ce urmează a fi uzinate este relativ mic și tehnologia de turnare reprezintă ea însăși o problemă deosebită se preferă construcția sudată, soluție care prezintă (comparativ cu cea turnată) următoarele avantaje:

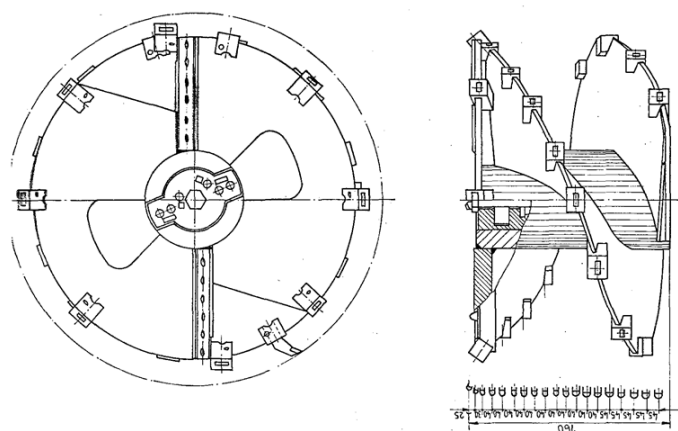
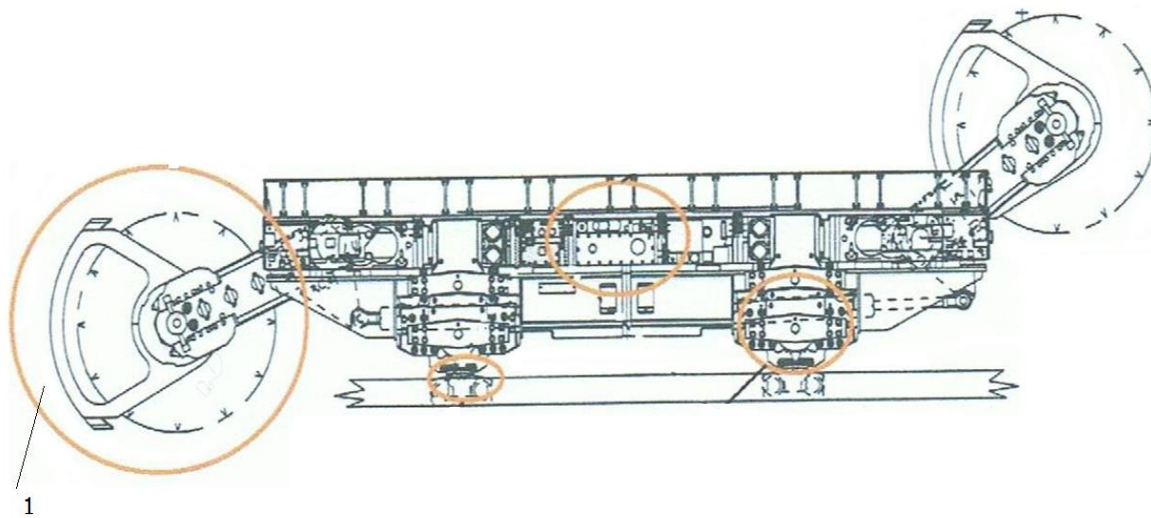


Fig. 2. Combină de abataj/Tamburul combinei

- masa elicelor și a organului de lucru tăietor, în ansamblu, este mai mică, adică se reduce consumul de metal;
- reperetele se realizează din profiluri laminate având rezistența mecanică și omogenitate mai mare decât cele turnate;
- refacerea suprafețelor uzate ale elementelor sudate (elice și tambur) cu materiale compozite se poate realiza în condiții tehnice bune.

**2. Rezultatele urmăririi în exploatare a transportorului cu raclete TR-7A**

Întreruperile în funcționare ale transportoarelor cu raclete se datorează defecțiunilor care apar la subansamblurile care le compun, fie ca urmare a unei montări sau a unei exploatare necorespunzătoare, fie datorită neglijenței în timpul funcționării sau a unei întrețineri insuficiente; în anumite cazuri se constată că materialul din care sunt executate subansamblele se uzează repede, fapt pentru care se caută soluții de reabilitare eficientă a acestora.

Tabelul 1. Subansambluri defecte ale transportorului TR-7A

Nr. crt.	Denumire subansamblu defect	U.M.	Tip transportor TR-7A
1	Lanț	ore/an	350
		%	26,72
2	Jgheaburi	ore/an	250
		%	19,08
3	Stații de acționare și întoarcere	ore/an	150
		%	11,45
4	Reductoare	ore/an	300
		%	22,9
5	Cuplaj hidraulic sau elastic	ore/an	60
		%	4,58
6	Motor electric	ore/an	200
		%	15,27
7	Total	ore/an	1310

Situația defectelor la principalele subsansamble din componența transportoarelor cu raclete, utilizate la o exploatare minieră din Valea Jiului este prezentată în tabelul 1.

Se observă (Figura 3) că 26,72% din totalul defecțiunilor apar la lanț, respectiv 19,08% la jgheab, având drept cauze cele enumerate în tabelul 2.

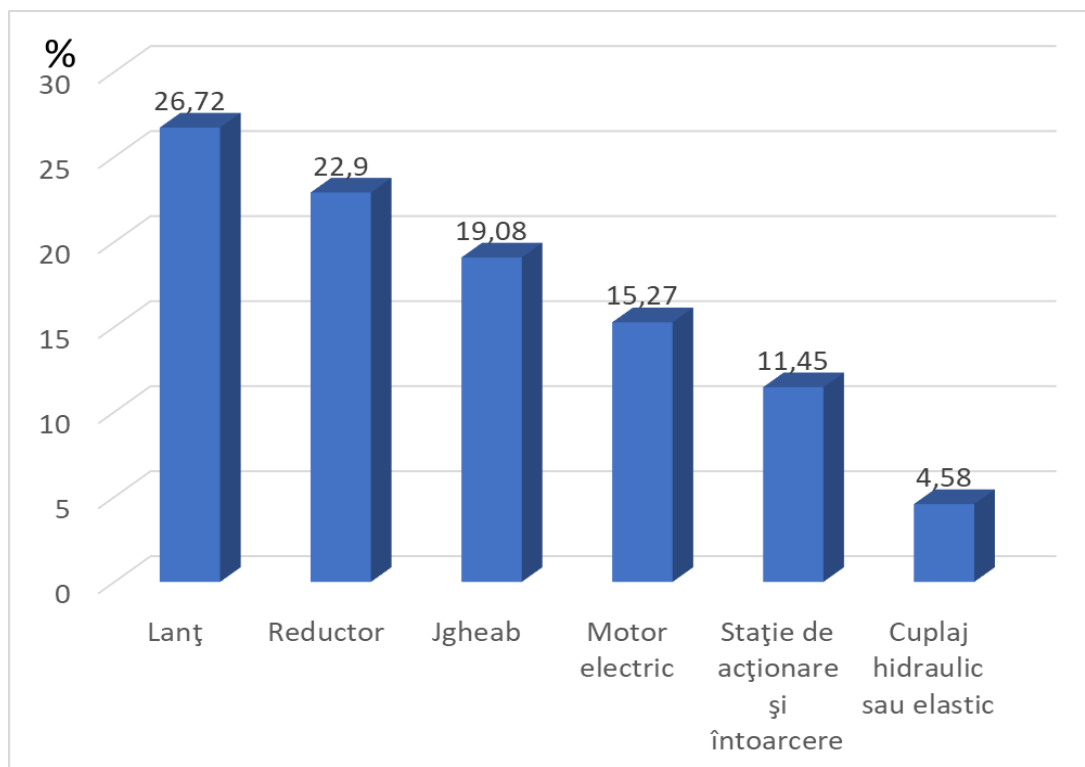
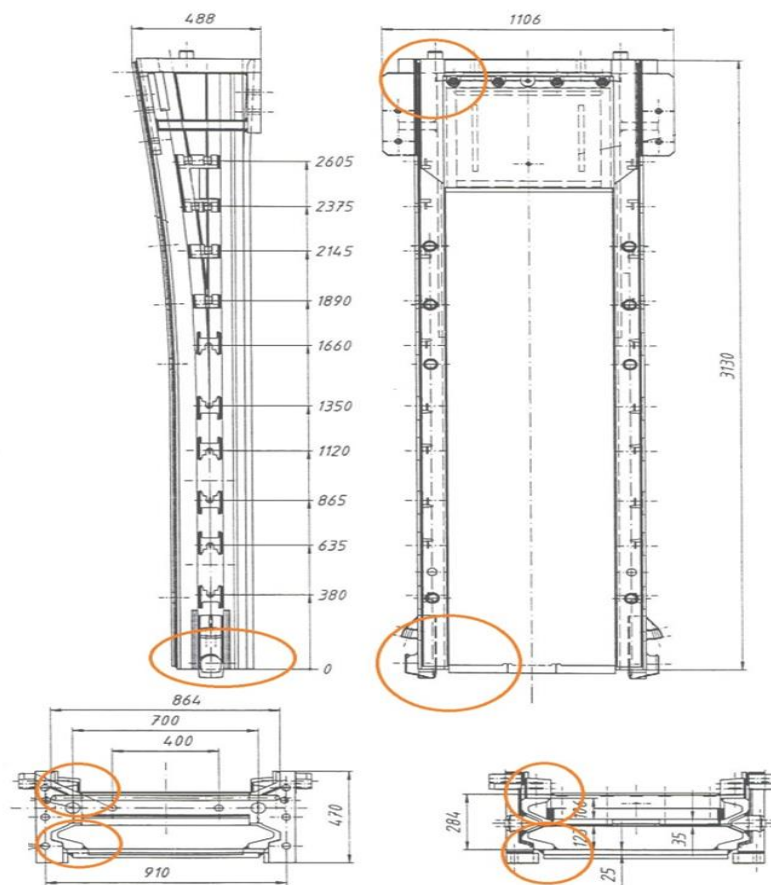


Fig. 3. Ponderea defectelor unui transportor cu raclete

Tabelul 2 Cauzele defecțiunilor

Nr. crt.	Subansamblu	Denumirea defecțiunii	Cauza defecțiunii	Periodicitatea
1	Lanțul cu raclete	<ul style="list-style-type: none"> <li>- se deplasează cu șocuri pe o anumită porțiune;</li> <li>- sare periodic de pe tambura de acționare;</li> <li>- lanțul este blocat;</li> <li>- lanțul se rupe.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ghidajele sunt uzate, iar lonjeroanele s-au deformat și au format praguri;</li> <li>- lanțul este răsucit pe o anumită porțiune;</li> <li>- lanțul este uzat sau decalibrat;</li> <li>- jgheaburi rupte;</li> <li>- uzura racletelor;</li> <li>- inflexiuni ale transportorului în plan vertical sau orizontal;</li> <li>- s-a adunat material sub ramura inferioară;</li> <li>- calitatea slabă a materialului din lanțuri sau ocheți;</li> <li>- uzura mare a rolei de întoarcere sau a stelei de acționare</li> </ul>	15-16 ori/lună
2	Jgheab	<ul style="list-style-type: none"> <li>- racleta agată în linia de ghidaj;</li> <li>- lanțul cu raclete se mișcă cu șocuri;</li> <li>- s-au format praguri mari între șocuri.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- uzură excesivă a jgheaburilor ceea ce a condus la formarea de praguri în pereții laterali;</li> <li>- calitatea slabă a materialului din care sunt confecționate;</li> <li>- lipsa legăturilor suplimentare dintre jgheaburi;</li> <li>- alinierea necorespunzătoare a jgheaburilor în plan vertical sau orizontal;</li> <li>- tabla mediană este uzată și deformată;</li> <li>- lonjeroanele s-au deformat și au format praguri.</li> </ul>	8-10 ori/lună

Jgheaburile transportoarelor (Figura 4) se execută din oțeluri manganoase, mangano-silicioase sau cu crom și mangan, care au rezistență la presiune de contact de  $700\div 800\text{ N/mm}^2$ .



**Fig.4. Jgheaburi de transportoare cu raclete**

Pentru creșterea duratei de viață a jgheaburilor este necesară călirea capetelor jgheaburilor pe o distanță de  $150\div 200$  mm, mai ales în locurile în care se produce frecarea cu lanțurile sau cu capetele racletelor; acestea sunt suprafețele interioare ale ghidajelor de pe ramura plină a transportoarelor cu un lanț, care se supun unei căliri superficiale prin curenți de medie frecvență (8000 Hz) pe adâncime de minim 3 mm (se asigură o rezistență la presiune de contact de  $1600\text{ N/mm}^2$ ).

Reabilitarea jgheaburilor se poate realiza uneori cu elemente de formă specială din oțel cu rezistență mare la uzură sau prin încărcare cu sudură.

Pentru reabilitarea experimentală a jgheaburilor de transportor TR-7 au fost utilizate materiale compozite (Figura 5) cu rezistența mărită la uzare, dar și cu proprietăți antiscânteie.



**Fig.5. Material compozit**

### 3. Concluzii

În cazul transportorului de abataj TR-7A frecvența cea mai mare a căderilor (26,72%) este la lanț, iar la jgheab de 19,08 %.

Soluția propusă pentru recondiționarea subansamblurilor echipamentelor miniere supuse uzurii este de realizare a unor suprafețe cu arhitectura multistrat, prin sudare, care să permită îmbunătățirea indicatorilor de fiabilitate ale acestora și să contribuie la reducerea cheltuielilor de exploatare.

Materiale metalice compozite, cu rezistență mărită la uzare, dar și cu proprietăți antiscânteie, reprezintă o soluție de viitor și puțin studiată, în vederea utilizării la execuția subansamblelor mașinilor și utilajelor care funcționează în medii cu pericol de explozie.

#### **Bibliografie:**

1. D. Brânzan, *Teză de doctorat*, 2012;
2. Dumitrescu I., Florea V.A. – *Desen tehnic industrial utilizând soft-uri CAD*, Editura Universitas, Petroșani, ISBN 978-973-741-596-7, 2018;
3. Florea V. – *Fiabilitatea și mentenanța produselor – îndrumător de laborator*, Editura Universitas, Petroșani, ISBN 978-973-741-240-9, 2011;
4. Vlad Alexandru Florea - *Mentenanța echipamentelor industriale*, Petroșani, Editura Universitas, ISBN 978-973-741-681-0, 2020;